Математическая логика
Практика 01
Неклассические логики

Эдгар Жаворонков

11 февраля 2021г.

1. Многозначные логики

Поговорим про многозначные логики – логики, в которых каждой пропозициональной переменной можно приписать одно из нескольких значений(трех, четырех и так далее). Проще всего думать про них, как о логиках, где откинут закон исключенного третьего – про любую формулу известно, что она либо истина, либо ложна.

Исторически, первым, кто не принимал на веру закон исключенного третьего был Аристотель, хоть и сам считался отцом классической логики. Хотя развитие эти логические системы получили только в XX веке

Для простоты посмотрим на примеры трехзначных логик. В них кроме истины и лжи добавляется новое значение – неизвестность, неопределенность, и т.д.

1.1. Логики Клини(сильная и слабая) и Приста

Посмотрим на таблицы истинности для пропозициональных связок в этих логиках.

1. Сильная логика Клини(K_3)

A	$\neg A$
T	F
I	I
F	T

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	I	I
T	F	F
I	T	I
I	I	I
I	F	F
F	T	F
F	I	F
F	F	F

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	I	T
T	F	T
I	T	T
I	I	I
I	F	I
F	T	T
F	I	I
F	F	F

A	B	$A \to B$
T	T	T
T	I	I
T	F	F
I	T	T
I	I	I
I	F	I
F	T	T
F	I	T
F	F	T

2. Слабая логика Клини(B_3^I)

A	$\neg A$
T	F
I	I
F	T

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	I	I
T	F	F
I	T	I
I	I	I
I	F	I
F	T	F
F	I	I
F	F	F

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	I	I
T	F	T
I	T	I
I	I	I
I	F	I
F	T	T
F	I	I
F	F	F

A	B	$A \to B$
T	T	T
T	I	I
T	F	F
I	T	I
I	I	I
I	F	I
F	T	T
F	I	I
F	F	T

3. В логике Приста(P_3) значения пропозициональных связок определены так же, как и в K_3.

Отличие этих трех логик в том, какие значения мы полагаем истинными. В логиках Клини – единственное истинное значение – это T, в то время как у Приста – как T, так и I(поэтому ее называют логикой парадоксов или LP)

Другой пример многозначной логики – логика Гёделя G_k. В ней ровно k истинностных значений, которые определяются как:

$$0, \frac{1}{k-1}, \frac{2}{k-1}, \cdots, \frac{k-2}{k-1}, 1$$

Истиной считается единица. Конъюнкция и дизъюнкция определяются как минимум и максимум соответственно, а отрицание и импликация определены как:

$$\neg A = \begin{cases} 1 & \text{if } A = 0 \\ 0 & \text{if } A > 0 \end{cases}$$

$$A \to B = \begin{cases} 1 & \text{if } A \leqslant B \\ B & \text{otherwise} \end{cases}$$

2. Модальный язык и модальная логика

Еще одна интересная логическая система – это модальная логика, в которой помимо привычных нам связок($\wedge$, $\vee$, etc.) присутствуют так называемые модальные(лат. `modus` – способ, образ) связки.

Определим язык следующим образом. Пусть $\mathbb{V} = \{p, q, r...\}$ – пропозициональные переменные(их счетное множество). Тогда:

1. Всякая переменная есть формула
2. Если φ – это формула, то $\neg\varphi$ – тоже формула
3. Если φ и ψ – формулы, то $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ и $(\varphi \to \psi)$ – это тоже формулы
4. Наконец, если φ – формула, то $\Box\varphi$ – тоже формула

В паре с $\Box$ рассматривают $\Diamond$, которая вводится как $\Diamond\varphi = \neg\Box\neg\varphi$

Возникает вопрос, каким образом мы понимаем эти связки? Если про $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ можно подумать, что мы понимаем их классически(так и есть), то "коробочку" можно понимать массой способов:

1. $\Box\varphi$ – "φ необходимо" (алетическая или истинностная модальность)
2. $\Box\varphi$ – $\Box$ как внутренность множества в топологическом пространстве (топологическая модальность)
3. $\Box\varphi$ – "φ будет всегда"(временная модальность)

В предыдущих логиках мы определяли истинностное значение связок с помощью таблиц. Здесь предлагается пойти немного другим путем. Нам понадобится определение шкалы и модели Крипке.

Шкалой Крипке назовем пару $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$, где W – некоторое непустое множество, а R – бинарное отношение, заданое на этом множестве($R \subseteq W \times W$). Нестрого говоря, про W можно думать, что это множество возможных миров(как будто некоторая цивилизация развивается, мы за этим наблюдаем и можем увидеть различные положения дел)

Моделью назовем пару $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \rho\rangle$, где $\rho\colon \mathbb{V} \to 2^W$ – это функция оценки(или означивания). Не очень строго говоря, оценка показывает, в каких мирах шкалы Крипке истинны те или иные переменные. Индуктивно можно определить истинность формулы $\mathcal{M}, w \models \varphi$:

1. $\mathcal{M}, w \models p \Leftrightarrow w \in \rho(p)$
2. $\mathcal{M}, w \models \neg\varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}, w \not\models \varphi$
3. $\mathcal{M}, w \models \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \mathcal{M}, w \models \varphi$ или $\mathcal{M}, w \models \psi$
4. $\mathcal{M}, w \models \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \mathcal{M}, w \models \varphi$ и $\mathcal{M}, w \models \psi$
5. $\mathcal{M}, w \models \Box\varphi \Leftrightarrow \forall v, wRv \Rightarrow \mathcal{M}, v \models \varphi$

Последнее условие можно читать как "φ будет истинно всегда(или истинно с необходимостью) при положении дел w если при любом положении дел v в котором можно оказаться из w φ будет истинно"

3. Задания

1. Рассмотрим следующую шкалу Крипке:

$$\begin{tikzcd}
 & w_2 \arrow[loop above, "R"] \arrow[dd, "R"] \\
w_1 \arrow[ur, "R"] \arrow[dr, "R"'] & \\
 & w_3 \arrow[loop below, "R"]
\end{tikzcd}$$

Пусть функция оценки задана как:

$$\rho(p) = \{w_1, w_2, w_3\}$$
$$\rho(q) = \{w_2\}$$

В каком мире истинна формула $\Box p$? $\Box p \to p$? $\Box p \to \Diamond p$

4. Домашнее задание

1. В какой из многозначных логик, рассмотренных выше, истинны все пропозициональные тавтологии? Обоснуйте ваш ответ

2. Для каждой многозначной логики выразите бинарную связку $\leftrightarrow$(для логик Клини и Приста достаточно выписать таблицы истинности, для логики Гёделя – что-то, похожее на определение через систему)