Математическая логика и теория вычислимости Лекция 4. Исчисление высказываний генценовского типа

Денис Николаевич Москвин

ИТМО, корпоративная магистратура JetBrains
Разработка ПО / Software Engineering

03.03.2021

План лекции

1. Полнота исчисления высказываний
2. Понятия контрпримера и секвенции
3. Исчисление секвенций
4. Корректность и полнота исчисления секвенций
5. Выводимые правила

План лекции

1. Полнота исчисления высказываний
2. Понятия контрпримера и секвенции
3. Исчисление секвенций
4. Корректность и полнота исчисления секвенций
5. Выводимые правила

- Схемы аксиом:
  1. $A \to B \to A$
  2. $(A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C$
  3. $A \wedge B \to A$
  4. $A \wedge B \to B$
  5. $A \to B \to A \wedge B$
  6. $A \to A \vee B$
  7. $B \to A \vee B$
  8. $(A \to C) \to (B \to C) \to A \vee B \to C$
  9. $\neg A \to A \to B$
  10. $(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A$
  11. $A \vee \neg A$
- Правило вывода (modus ponens, MP)

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}$$

Вспомогательные факты (1)

Лемма 1. Для любых формул A и B верны теоремы:

$$\begin{array}{lll}
\neg A, \neg B \vdash \neg(A \wedge B) & \neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B) & \neg A, \neg B \vdash A \to B \\
\neg A, B \vdash \neg(A \wedge B) & \neg A, B \vdash A \vee B & \neg A, B \vdash A \to B \\
A, \neg B \vdash \neg(A \wedge B) & A, \neg B \vdash A \vee B & A, \neg B \vdash \neg(A \to B) \\
A, B \vdash A \wedge B & A, B \vdash A \vee B & A, B \vdash A \to B
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\neg A \vdash \neg A \\
A \vdash \neg\neg A
\end{array}$$

Доказательство. Несложный вывод. ■

Вспомогательные факты (2)

Лемма 2. Пусть B — формула, содержащая n переменных $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда для каждой строки ее таблицы истинности

p_1	p_2	$\ldots$	p_n	B
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
α_1	α_2	$\ldots$	α_n	β
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

можно построить выводы

$$L_1, L_2, \ldots, L_n \vdash B'$$

где

$$L_i = \begin{cases} p_i, & \alpha_i = 1, \\ \neg p_i, & \alpha_i = 0, \end{cases} \qquad B' = \begin{cases} B, & \beta = 1, \\ \neg B, & \beta = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Индукция по построению формулы B' с использованием Леммы 1. ■

Теорема (о полноте исчисления высказываний). Любая тавтология пропозициональной логики выводима в исчислении высказываний.

Доказательство. Пусть формула B — тавтология. Тогда для любого из 2^n наборов литералов выводится B, а не $\neg B$:

$$L_1, L_2, \ldots, L_n \vdash B$$

Выберем переменную, например, p_n. Имеем

$$\begin{array}{lll}
1 & L_1, \ldots, L_{n-1}, p_n \vdash B & \\
2 & L_1, \ldots, L_{n-1}, \neg p_n \vdash B & \\
3 & L_1, \ldots, L_{n-1} \vdash p_n \vee \neg p_n & (A11) \\
4 & L_1, \ldots, L_{n-1} \vdash B & \vee elim(3)(1)(2) \\
 & \ldots & \\
 & \vdash B &
\end{array}$$

■

Более универсальный подход к корректности и полноте

- Множество формул Γ называют *совместным*, если существует такой набор значений переменных, на которых все формулы из Γ истинны. (Другой эквивалентный термин — множество формул *имеет модель*.)
- Множество формул Γ называют *противоречивым*, если из него одновременно можно вывести формулы A и $\neg A$. (В противном случае это множество формул *непротиворечиво*.)
- Если множество формул противоречиво, то, используя $\neg\mathrm{elim}$, из него можно вывести любую формулу.

Корректность, дубль 2

- **Теорема.** Всякое совместное множество формул Γ непротиворечиво.
- **Доказательство.** Пусть оно противоречиво, тогда из него выводится некоторая A и $\neg A$. Фиксируем набор переменных, обеспечивающий совместность. На этом наборе все формулы из Γ истинны, тогда A тоже должна быть истинна[1], как и $\neg A$. Противоречие. ■
- **Теорема.** Исчисление высказываний корректно.
- **Доказательство.** Если A — теорема исчисления высказываний, то множество $\{\neg A\}$ — противоречиво:

$$\neg A \vdash \neg A$$
$$\neg A \vdash A$$

Тогда оно несовместно, то есть $\neg A$ ложна на всех значениях переменных, а значит A — тавтология. ■

[1] Индукцией по структуре вывода.

Полнота множества формул

- Множество формул Γ называют *полным*, если для любой формулы A имеет место либо $\Gamma \vdash A$, либо $\Gamma \vdash \neg A$.
- **Лемма 1.** Всякое непротиворечивое множество Γ содержится в непротиворечивом полном множестве Δ.
- **Доказательство.** Пусть A произвольная формула. Рассмотрим Γ, A и $\Gamma, \neg A$. Одно из них непротиворечиво. Действительно, если противоречивы оба, то по $\neg$intro $\Gamma \vdash \neg A$ и $\Gamma \vdash \neg\neg A$, что противоречит непротиворечивости Γ. Будем теперь перебирать все допустимые формулы, добавляя к Γ либо формулу, либо отрицание, сохраняя непротиворечивость. ■

- **Лемма 2.** Всякое непротиворечивое полное множество Δ совместно.
- **Доказательство.**
  Из непротиворечивости и полноты следует, что для любой переменной p в Δ входит ровно одно: либо p, либо $\neg p$. Это формирует набор ν «выполняющих» значений переменных (модель):

$$\begin{array}{lcl} \Delta \vdash p & \Rightarrow & \nu : p \mapsto 1 \\ \Delta \vdash \neg p & \Rightarrow & \nu : p \mapsto 0 \end{array}$$

  Индукцией по построению для произвольной формулы A из Δ доказываем

$$\begin{array}{lcl} A(\nu) = 1 & \Rightarrow & \Delta \vdash A \\ A(\nu) = 0 & \Rightarrow & \Delta \vdash \neg A \end{array}$$

  База: Если формула A — переменная, то очевидно.
  Шаг: делаем стандартный перебор связок (самостоятельно). ■

Полнота, дубль 2

- **Теорема.** Всякое непротиворечивое множество Γ совместно.
- **Доказательство.** Непосредственно из Лемм 1 и 2.■
- **Теорема (о полноте).** Всякая тавтология есть теорема. **Доказательство.** Пусть A — тавтология, тогда $\{\neg A\}$ несовместно, тогда из $\neg A$ выводится противоречие, тогда $\vdash \neg\neg A$, тогда $\vdash A$. ■

Компактность

- **Теорема (о компактности для исчисления высказываний).** Множество формул, у которого всякое конечное подмножество совместно, само является совместным.
- **Доказательство.** Несовместность равносильна противоречивости, а вывод противоречия всегда конечен (как любой вывод).■

План лекции

Идея контрпримера

- Пусть имеется некоторая формула A. Как выяснтить, что она не тавтология?
- Привести *контрпример*, то есть построить оценку, на которой эта формула является ложной.
- Для построения контрпримера можно разбирать формулу:
  - если главная связка — дизъюнкция, то ищем значения переменных, при которых оба аргумента ложны;
  - если главная связка — отрицание, то ищем значения переменных, при которых аргумент истинен;
  - если главная связка — импликация, то ищем значения переменных, при которых посылка истинна, а заключение — ложно;
  - если главная связка — конъюнкция, то ищем значения переменных, при которых либо один аргумент ложен, либо другой.

Поиск контрпримера

Будем разбирать, например, формулу $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\frac{}{\vdash \neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q}$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать, например, формулу $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\dfrac{\overline{\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge q}}{\vdash \neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q}$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать, например, формулу $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\vdash p \vee q, \neg p \wedge q}}{\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge q}}{\vdash \neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q}$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать, например, формулу $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash p, q, \neg p \wedge q}}{\vdash p \vee q, \neg p \wedge q}}{\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge q}}{\vdash \neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q}$$

Будем разбирать, например, формулу $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\vdash p, q, \neg p} \qquad \vdash p, q, q}{\vdash p, q, \neg p \wedge q}}{\vdash p \vee q, \neg p \wedge q}}{\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge q}}{\vdash \neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q}$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать, например, формулу $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p, q}{\vdash p, q, \neg p} \qquad \vdash p, q, q}{\vdash p, q, \neg p \wedge q}}{\vdash p \vee q, \neg p \wedge q}}{\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge q}}{\vdash \neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q}
$$

- Слева контрпримера нет: p одновременно должно быть истинным или ложным при искомой оценке.
- Справа — есть: $p = 0$, $q = 0$.

Понятие секвенции

- *Секвенцией* называют конструкцию вида

$$\Gamma \vdash \Delta$$

  где Γ и Δ — конечные наборы формул, возможно пустые.
- Набор формул Γ называют *антецедентом*, а Δ — *сукцедентом* секвенции.
- Примеры секвенций

$$p \wedge q, \neg p \vdash p \vee \neg q, q$$

$$p \to q, \neg p \vdash$$

$$\vdash \neg p \wedge \neg q, p \to q$$

Общезначимые секвенции

- Оценка называется *контрпримером для секвенции*

$$\Gamma \vdash \Delta$$

  если при этой оценке истинны все члены антецедента Γ и ложны все члены сукцедента Δ.
- Любой секвенции $\Gamma \vdash \Delta$ можно сопоставить формулу

$$\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta$$

- Пустая коньюнкция при этом рассматривается как 1, а пустая дизъюнкция — как 0.
- Секвенция называется *общезначимой*, если представляющая ее формула общезначима. При этом секвенция не имеет контрпримера.

План лекции

1. Полнота исчисления высказываний
2. Понятия контрпримера и секвенции
3. **Исчисление секвенций**
4. Корректность и полнота исчисления секвенций
5. Выводимые правила

Правила вывода для исчисления секвенций (1)

- В исчислении секвенций имеется 8 правил вывода — по два на каждую связку.
- Все правила сохраняют «заказ на контрпример» снизу вверх.
- *Правило введения конъюнкции в антецедент*:

$$\frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\wedge \vdash)$$

- *Правило введения конъюнкции в сукцедент*:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \quad (\vdash \wedge)$$

Правила вывода для исчисления секвенций (2)

- *Правило введения дизъюнкции в антецедент*:

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\vee \vdash)$$

  Фактически это правило разбора случаев.

- *Правило введения дизъюнкции в сукцедент*:

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \quad (\vdash \vee)$$

Правила вывода для исчисления секвенций (3)

- *Правило введения импликации в антецедент*:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \to B, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\to\vdash)$$

- *Правило введения импликации в сукцедент*:

$$\frac{A, \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \quad (\vdash\to)$$

Правила вывода для исчисления секвенций (4)

- *Правило введения отрицания в антецедент*:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\neg \vdash)$$

- *Правило введения отрицания в сукцедент*:

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \quad (\vdash \neg)$$

Структурные правила

- Предыдущие правила называют *логическими*. Ниже приведены так называемые *структурные* правила, носящие вспомогательный характер.
- *Правила расширения (weakening)*:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\ (W \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\vdash W)$$

- *Правила сокращения (contraction)*:

$$\frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\ (C \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\vdash C)$$

- *Правила перестановки (permutation)*:

$$\frac{\Gamma, A, B, \Theta \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Theta \vdash \Delta}\ (P \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Theta}\ (\vdash P)$$

Аксиома исчисления секвенций

- Если принять все структурные правила, то аксиома выглядит так
$$A \vdash A$$

Аксиома исчисления секвенций

- Если принять все структурные правила, то аксиома выглядит так
$$A \vdash A$$

- Если рассматривать антецедент и сукцедент как множества, а не как последовательности и отказаться от использования правила расширения, то аксиома будет выглядеть так
$$A, \Gamma \vdash A, \Delta$$

- В исчислении высказываний можно ограничиться требованием, чтобы A и все формулы, составляющие Γ и Δ, были пропозициональными переменными.

Дерево поиска вывода и дерево вывода

- Под *выводом* формулы A в исчислении секвенций будем понимать вывод секвенции

$$\vdash A$$

- Нахождение посылок некоторого применения правила вывода по известному заключению называется *контрприменением* этого правила.
- Дерево с конечным числом узлов, каждый из которых является секвенцией, называется *деревом поиска вывода* секвенции.
- Если все листья такого дерева оказались аксиомами, то получившееся дерево называют *деревом вывода*.
- В противном случае мы находим контрпример и заключаем, что формула не выводима в исчислении секвенций.

Пример

- Выведем в исчислении секвенций закон Пирса

$$\vdash ((p \to q) \to p) \to p$$

- Строим дерево поиска вывода

$$\frac{}{\vdash ((p \to q) \to p) \to p}$$

Пример

- Выведем в исчислении секвенций закон Пирса

$$\vdash ((p \to q) \to p) \to p$$

- Строим дерево поиска вывода

$$\dfrac{}{\vdash ((p \to q) \to p) \to p} \quad (\vdash\to)$$

Контр-применяемое правило:

$$\dfrac{A, \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \quad (\vdash\to)$$

Пример

- Выведем в исчислении секвенций закон Пирса

$$\vdash ((p \to q) \to p) \to p$$

- Строим дерево поиска вывода

$$\cfrac{\cfrac{}{(p \to q) \to p \vdash p}}{\vdash ((p \to q) \to p) \to p} \quad (\vdash\to)$$

- Выведем в исчислении секвенций закон Пирса

$$\vdash ((p \to q) \to p) \to p$$

- Строим дерево поиска вывода

$$\dfrac{\dfrac{}{(p \to q) \to p \vdash p}\,(\to\vdash)}{\vdash ((p \to q) \to p) \to p}\,(\vdash\to)$$

Контр-применяемое правило:

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \to B, \Gamma \vdash \Delta}\,(\to\vdash)$$

- Выведем в исчислении секвенций закон Пирса

$$\vdash ((p \to q) \to p) \to p$$

- Строим дерево поиска вывода

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash p \to q, p} \qquad p \vdash p}{(p \to q) \to p \vdash p}\,(\to\vdash)}{\vdash ((p \to q) \to p) \to p}\,(\vdash\to)$$

Пример

- Выведем в исчислении секвенций закон Пирса

$$\vdash ((p \to q) \to p) \to p$$

- Строим дерево поиска вывода

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash p \to q, p}\;(\vdash\to) \qquad p \vdash p}{(p \to q) \to p \vdash p}\;(\to\vdash)}{\vdash ((p \to q) \to p) \to p}\;(\vdash\to)$$

Контр-применяемое правило:

$$\dfrac{A, \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\;(\vdash\to)$$

Пример

- Выведем в исчислении секвенций закон Пирса

$$\vdash ((p \to q) \to p) \to p$$

- Строим дерево поиска вывода

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash q, p}{\vdash p \to q, p}\,(\vdash\to) \qquad p \vdash p}{(p \to q) \to p \vdash p}\,(\to\vdash)}{\vdash ((p \to q) \to p) \to p}\,(\vdash\to) \quad \blacksquare$$

Правило сечения

- Среди классических правил вывода, восходящих к Генцену, имелось ещё *правило сечения (cut)*:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad A, \Theta \vdash \Sigma}{\Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Sigma} \quad (\mathrm{CUT})$$

- Для наших целей это правило крайне неудобно, поскольку делает невозможным простой алгоритм поиска контрпримера.
- К счастью, сам же Генцен доказал для широкого класса секвенциальных исчислений *теорему об устранении сечения*.
- Для нашего пропозиционального исчисления эта теорема будет тривиальным следствием его полноты и корректности.

План лекции

1. Полнота исчисления высказываний
2. Понятия контрпримера и секвенции
3. Исчисление секвенций
4. Корректность и полнота исчисления секвенций
5. Выводимые правила

- **Теорема (о корректности исчисления секвенций).** Если секвенция выводима, то она не имеет контрпримера.
- **Доказательство.** Индукция по структуре вывода. База: аксиомы не имеют контрпримера. Шаг: анализ правил вывода. ■

Полнота исчисления секвенций

- **Теорема (о полноте исчисления секвенций).** Если секвенция не имеет контрпримера, то она выводима.
- **Доказательство.** Строим дерево поиска контрпримера, поскольку контрпримера нет, то все листья — аксиомы. Получили дерево вывода. ■
- **Следствие.** Любая тавтология пропозициональной логики выводима в исчислении секвенций.

План лекции

Правило введения $\leftrightarrow$ в сукцедент

- Хотелось бы иметь правила для введения связки $\leftrightarrow$ в антецедент и сукцедент секвенции.
- Напомним, что $A \leftrightarrow B$ по определению

$$(A \to B) \wedge (B \to A)$$

- Выведем соответствующее правило

$$\dfrac{\dfrac{A, \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}(\vdash\to) \qquad \dfrac{B, \Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash B \to A, \Delta}(\vdash\to)}{\Gamma \vdash (A \to B) \wedge (B \to A), \Delta} \quad (\vdash \wedge)$$

- Итак, *правило введения $\leftrightarrow$ в сукцедент секвенции*

$$\dfrac{A, \Gamma \vdash B, \Delta \qquad B, \Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B, \Delta} \quad (\vdash\leftrightarrow)$$

Правило введения $\leftrightarrow$ в антецедент

- Аналогично можно вывести *правило введения* $\leftrightarrow$ *в антецедент секвенции*

$$\frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash A, B, \Delta}{A \leftrightarrow B, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\leftrightarrow\vdash)$$