

Задание 2

26 января 2020 г.

1. Докажите $H(\alpha|\beta) \geq H(\alpha|\beta, \gamma)$. Подсказка, распишите определение.
2. Пусть X_1, X_2, \dots, X_n случайные величины. Пусть $S_1, \dots, S_m \subseteq [n]$ такие множества, что каждый индекс $i \in [n]$ принадлежит как минимум k подмножествам среди S_1, \dots, S_m . Обозначим через $H(X_S) = H(X_{i_1}, \dots, X_{i_p})$, где $S = \{i_1, \dots, i_p\}$. Докажите неравенство $kH(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq H(X_{S_1}) + H(X_{S_2}) + \dots + H(X_{S_m})$.
3. Докажите, что $I(f(\alpha) : \beta) \leq I(\alpha : \beta)$ для любой функции f .
4. Докажите, что если $I(\alpha : \gamma | \beta) = 0$, то $I(\alpha : \gamma) \leq I(\alpha : \beta)$, а значит и $I(\alpha : \gamma) \leq H(\beta)$.
5. Случайно и равновероятно выбирается натуральное число не большее 1000. Докажите, что любой детерминированный алгоритм задающий вопросы с ответами ДА/НЕТ потребует в среднем не меньше $\log_2(1000)$ вопросов.
6. Докажите, что любой инъективное кодирование со средней длиной ℓ можно преобразовать в префиксное длиной не больше $\ell + 2 \log_2 \ell + 4$.
7. Докажите, что
 - код Шеннона-Фано является префиксным.
 - если центральный отрезок в коде Шеннона-Фано относить туда куда попала большая его часть, то такой код не будет сбалансированным.
 - если центральный отрезок в коде Шеннона-Фано относить к правой части, то он не будет сбалансированным.