# Теория категорий

## Сопряженные функторы

Валерий Исаев

26 февраля 2019 г.

# План лекции

Рефлективные подкатегории

Определение сопряженности

Единица и коединица сопряжения

Примеры

# Рефлективные подкатегории

- Пусть $\mathbf{C}$ – полная подкатегория $\mathbf{D}$. Допустим мы хотим доказать, что вложение $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – эквивалентность.
- Тогда нам нужно найти для каждого объекта $X$ из $\mathbf{D}$ объект из $\mathbf{C}$, изоморфный $X$.
- Иногда бывает так, что эти категории не эквивалентны, но мы всё же можем найти некоторый объект $Y$ в $\mathbf{C}$, который является в некотором смысле лучшим приближением к $X$.
- Конкретно, должна существовать стрелка $f : X \to Y$, которая может не быть изоморфизмом, но всё же является в каком-то смысле наилучшей такой стрелкой.

# Определение

- Пусть **C** – полная подкатегория **D**. Мы говорим, что **C** – *рефлективная* подкатегория **D**, если для любого объекта $X$ из **D** существует стрелка $f : X \to Y$, где $Y \in$ **C**, такая что для любой стрелки $f' : X \to Y'$, где $Y' \in$ **C**, существует уникальный морфизм $h : Y \to Y'$, такой что следующая диаграмма коммутирует:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f"'] & Y' \\ Y \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

- Если вместо стрелки $X \to Y$ существует стрелка $Y \to X$ с аналогичным универсальным свойством, то категория называется *корефлективной*.

# Примеры

- Все стрелки в следующей диаргамме являются вложениям рефлективных подкатегорий:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Ab} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Grp} \arrow[d] \\ \mathbf{CMon} \arrow[r] & \mathbf{Mon} \end{tikzcd}$$

- Например, чтобы по группе $G$ построить соответствующую ей абелеву группу, нужно взять фактор по коммутанту $G/[G, G]$.

# План лекции

# Моноиды и слова

- Пусть $U : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$ – забывающий функтор на категории моноидов.
- Пусть $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Mon}$ – функтор, сопоставляющий множеству $A$ множество слов в алфавите $A$.

$$F(A) = \{ \ [a_1 \dots a_n] \mid a_i \in A \ \}$$

- Тогда любая функция $f : A \to U(B)$ уникальным образом доопределяется до морфизма моноидов $g : F(A) \to B$.
- У этого соотвествия существует обратное, каждому морфизму моноидов $g : F(A) \to B$ сопоставляющее функцию $f : A \to U(B)$, $f(a) = g([a])$.
- Таким образом, существует биекция $\varphi : Hom_{\mathbf{Set}}(A, U(B)) \simeq Hom_{\mathbf{Mon}}(F(A), B)$.

# Векторные пространства и базисы

- Пусть $\mathbf{Vec}_K$ – категория векторных пространств над полем $K$.
- Пусть $U : \mathbf{Vec}_K \to \mathbf{Set}$ – забывающий функтор.
- Пусть $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Vec}_K$ – функтор, сопоставляющий множеству $A$ векторное пространство с базисом $A$.

$$F(A) = \{\ c_1 a_1 + \ldots + c_n a_n \mid c_i \in K, a_i \in A\ \}$$

- Тогда любая функция $f : A \to U(B)$ уникальным образом доопределяется до линейного преобразования $g : F(A) \to B$.
- У этого соотвествия существует обратное, каждому линейному преобразованию $g : F(A) \to B$ сопоставляющее функцию $f : A \to U(B)$, $f(a) = g(1a)$.
- Таким образом, существует биекция $\varphi : Hom_{\mathbf{Set}}(A, U(B)) \simeq Hom_{\mathbf{Vec}}(F(A), B)$.

## Кольца и полиномы

- Пусть $U$ : **Ring** $\to$ **Set** – забывающий функтор на категории колец.
- Пусть $F$ : **Set** $\to$ **Ring** – функтор, сопоставляющий множеству $X$ кольцо полиномов с переменными в $X$.
- Тогда любая функция $f : A \to U(B)$ уникальным образом доопределяется до морфизма колец $g : F(A) \to B$.
- У этого соотвествия существует обратное, каждому линейному преобразованию $g : F(A) \to B$ сопоставляющее функцию $f : A \to U(B)$, $f(a) = g(1a^1)$.
- Таким образом, существует биекция $\varphi : Hom_{\mathbf{Set}}(A, U(B)) \simeq Hom_{\mathbf{Ring}}(F(A), B)$.

# Сопряжение

**Definition**

*Сопряжение* между категориями $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ – это тройка $(F, U, \varphi)$, состоящая из функторов $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ и $U : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ и естественного изоморфизма $\varphi_{A,B} : Hom_{\mathbf{D}}(F(A), B) \simeq Hom_{\mathbf{C}}(A, U(B))$.

В определении $\varphi$ является естественным изоморфизмом между функторами $Hom_{\mathbf{D}}(F(-), -), Hom_{\mathbf{C}}(-, U(-)) : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{D} \to \mathbf{Set}$.

Во всех примерах, приведенных ранее, изоморфизм $\varphi_{A,B}$ был естественен по $A$ и $B$. Таким образом, это были примеры сопряжений.

# Уникальность сопряженных функторов

- Если $(F, U, \varphi)$ – сопряжение, то пишут $F \dashv U$ и говорят, что $F$ – *левый сопряженный* к $U$, а $U$ – *правый сопряженный* к $F$.
- Если $F \dashv U$ и $F' \dashv U$, то $F$ и $F'$ изоморфны.
- Доказательство: упражнение.
- Если $F \dashv U$ и $F \dashv U'$, то $U$ и $U'$ изоморфны.
- Доказательство: по дуальности.

# Сохранение (ко)пределов

## Proposition

*Левые сопряженные функторы сохраняют копределы. Правые сопряженные функторы сохраняют пределы.*

## Доказательство.

Второе утверждение является дуальным к первому. Докажем первое. Пусть $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – левый сопряженный к $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$. Пусть $D : J \to \mathbf{C}$ – некоторая диаграмма в $\mathbf{C}$. Пусть $L = colim\ D$ – копредел этой диаграммы.
Пусть $\alpha : F \circ D \to X$ – некоторый коконус в $\mathbf{D}$. Тогда существует уникальная стрелка из $L$ в $G(X)$. По сопряженности она соответствует уникальной стрелки из $F(L)$ в $X$. Таким образом, $F(L)$ – копредел $F \circ D$. □

# План лекции

# Определение

- Пусть $(F, G)$ – сопряжение.
- Тогда $\varphi_{A,F(A)} : Hom_{\mathbf{D}}(F(A), F(A)) \simeq Hom_{\mathbf{C}}(A, GF(A))$.
- Пусть $\eta_A : A \to GF(A)$ – естественное преобразование, которое определяется как $\eta_A = \varphi_{A,F(A)}(id_{F(A)})$.
- С другой стороны $\varphi_{G(B),B} : Hom_{\mathbf{D}}(FG(B), B) \simeq Hom_{\mathbf{C}}(G(B), G(B))$.
- Пусть $\epsilon_B : FG(B) \to B$ – естественное преобразование, которое определяется как $\epsilon_B = \varphi^{-1}_{G(B),B}(id_{G(B)})$.
- $\eta_A$ называется *единицей* сопряжения, а $\epsilon_B$ – *коединицей*.

# Примеры

- $\eta_A(a)$ возвращает "одноэлементное слово на букве $a$".
  - Для категории моноидов $\eta_A(a) = [a]$.
  - Для категории векторных пространств $\eta_A(a) = 1a$.
  - Для категории колец $\eta_A(a) = a$ – полином, состоящий из одной переменной $a$.
- $\epsilon_B : FU(B) \to B$ "вычисляет" формальное выражение в $B$.
  - Для категории моноидов $\epsilon_B([a_1 \ldots a_n]) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$.
  - Для категории векторных пространств $\epsilon_B(c_1 a_1 + \ldots + c_n a_n) = c_1 \cdot a_1 + \ldots + c_n \cdot a_n$.
  - Для категории колец $\epsilon_B$ определяется аналогичным образом как функция, вычисляющая полином на данных значениях.

# Свойства единицы и коединицы

## Proposition

*Если $(F, G, \varphi)$ – сопряжение, то следующие диаграммы коммутируют:*

$$
\begin{tikzcd}
G(B) \arrow[r, "\eta_{GB}"] \arrow[dr, "id_{GB}"'] & GFG(B) \arrow[d, "G\epsilon_B"] \\
& G(B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F\eta_A"] \arrow[dr, "id_{FA}"'] & FGF(A) \arrow[d, "\epsilon_{FA}"] \\
& F(A)
\end{tikzcd}
$$

# Доказательство

**Доказательство.**

Условия естественности $\varphi$ и $\varphi^{-1}$ можно переписать в следующем виде:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi(f \circ F(h))"] \arrow[d, "h"'] & G(C) \arrow[d, "G(g)"] \\ B \arrow[r, "\varphi(g \circ f)"'] \arrow[ur, "\varphi(f)"'] & G(D) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\varphi^{-1}(f' \circ h)"] \arrow[d, "F(h)"'] & C \arrow[d, "g"] \\ F(B) \arrow[r, "\varphi^{-1}(G(g) \circ f')"'] \arrow[ur, "\varphi^{-1}(f')"'] & D \end{tikzcd}$$

Нижний треугольник в первой диаграмме дает первое необходимое равенство при $f = id_{FG(B)}$ и $g = \epsilon_B$. Второе необходимое равенство получается из верхнего треугольника во второй диаграмме при $f' = id_{GF(A)}$ и $h = \eta_A$. $\square$

# Определение сопряжения через единицу и коединицу

Существует эквивалентное определение понятия сопряжения через единицу и коединицу.

## Proposition

*Четверка* $(F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}, G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}, \eta_A : A \to GF(A), \epsilon : FG(B) \to B)$, *состоящая из пары функторов и пары естественных преобразований, удовлетворяющих условию, приведенному в предыдущем утверждении, определяет сопряжение* $(F, G, \varphi)$, *где* $\varphi(f) = G(f) \circ \eta_A$ *для любого* $f : F(A) \to B$, $\varphi^{-1}(g) = \epsilon_B \circ F(g)$ *для любого* $g : A \to G(B)$. *Единицей и коединицей этого сопряжения являются* $\eta$ *и* $\epsilon$ *соответственно.*

# Доказательство

## Доказательство.

Последнее утверждение элементарно следует из определения $\varphi$ и $\varphi^{-1}$. Докажем, что $\varphi$ и $\varphi^{-1}$ взаимообратны:

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(\varphi(f)) = & \text{ (по определению } \varphi \text{ и } \varphi^{-1}) \\
\epsilon_B \circ FG(f) \circ F(\eta_A) = & \text{ (по естественности } \epsilon) \\
f \circ \epsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) = & \text{ (по свойству } \epsilon \text{ и } \eta) \\
& f. \\
\varphi(\varphi^{-1}(g)) = & \text{ (по определению } \varphi \text{ и } \varphi^{-1}) \\
G(\epsilon_B) \circ GF(g) \circ \eta_A = & \text{ (по естественности } \eta) \\
G(\epsilon_B) \circ \eta_{G(B)} \circ g = & \text{ (по свойству } \epsilon \text{ и } \eta) \\
& g.
\end{aligned}$$

# Доказательство

## Доказательство.

Осталось доказать, что $\varphi$ естественно. Для этого достаточно проверить равенства, приводившиеся в доказательстве предыдущего утверждения.

$$
\begin{aligned}
G(g)\circ\varphi(f) = {} & \text{(по определению } \varphi) \\
G(g)\circ G(f)\circ\eta_B = {} & \text{(так как } G \text{ -- функтор)} \\
G(g\circ f)\circ\eta_B = {} & \text{(по определению } \varphi) \\
\varphi(g\circ f). & \\
\varphi(f)\circ h = {} & \text{(по определению } \varphi) \\
G(f)\circ\eta_B\circ h = {} & \text{(по естественности } \eta) \\
G(f)\circ GF(h)\circ\eta_A = {} & \text{(по определению } \varphi) \\
\varphi(f\circ F(h)). &
\end{aligned}
$$

# План лекции

Рефлективные подкатегории

Определение сопряженности

Единица и коединица сопряжения

Примеры

# Эквивалентность категорий

- Если $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – эквивалентность категорий, то $F$ одноверeменно и левый и правый сопряженный.
- Любой обратный к $F$ будет его правым и левым сопряженным.

# Рефлективные подкатегории

- Если $i : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – функтор вложения полной подкатегории, то $i$ является правым сопряженным тогда и только тогда, когда $\mathbf{C}$ – рефлективная подкатегория.
- Левый сопряженный к $i$ называется рефлектором.
- Если $F \dashv i$, то $\eta_X : X \to i(F(X))$ дает нам необходимую аппроксимацию к $X$ в $\mathbf{C}$.
- Если $\mathbf{C}$ – рефлективная подкатегория, то $F : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ на объектах определяется очевидным образом, а на морфизмах по универсальному свойству.

# Определение

- Декартова категория является декартово замкнутой тогда и только тогда, когда для любого объекта $B$ функтор $- \times B$ является левым сопряженным.
- Действительно, правый сопряженный к нему – это функтор $(-)^B$, а коединица сопряжения $\epsilon_C : C^B \times B \to C$ – это морфизм вычисления $ev$.
- Биекция, которая появляется в определении сопряженных функторов, – это в точности биекция каррирования.