8 Упражнения

8.1. Какое минимальное количество цветов требуется, чтобы правильно раскрасить грани графа W_n, $n \geqslant 4$?

8.2. Без использования теоремы о четырех красках докажите, что любой планарный граф, свободный от треугольников, 4-раскрашиваем. Доказанная в 1959 году Гербертом Грёчем (Herbert Grötzsch) теорема утверждает, что любой такой граф на самом деле является 3-раскрашиваемым.

8.3. Используя представление тора в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами, постройте правильное вложение графов K_5 и $K_{3,3}$.

8.4. С использованием теоремы о четырех красках докажите, что любой внешнепланарный граф 3-раскрашиваем.

8.5. Граф, который можно правильно вложить в поверхность рода g и невозможно вложить в поверхность меньшего рода, называется графом рода g. Докажите, что род произвольного простого связного графа G удовлетворяет неравенству

$$g \geqslant 1 + \frac{m}{6} - \frac{n}{2}, \tag{1}$$

а род простого связного графа, свободного от треугольников, — неравенству

$$g \geqslant 1 + \frac{m}{4} - \frac{n}{2}. \tag{2}$$

8.6. Докажите, что род полного графа K_n удовлетворяет неравенству

$$g(K_n) \geqslant \frac{(n-3)(n-4)}{12}. \tag{3}$$

8.7. Докажите, что род k-мерного куба Q_k удовлетворяет неравенству

$$g(Q_k) \geqslant 1 + (k-4) \cdot 2^{k-3}.$$

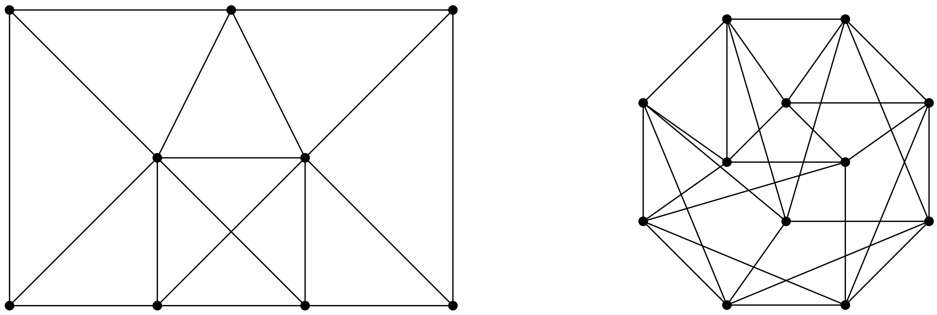
8.8. Используя представление тора в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами, постройте правильное вложение графа Петерсена в тор, доказав тем самым, что род графа Петерсена равен 1.

8.9. Докажите с помощью теоремы Куратовского непланарность графа G, изображенного на рис. 1(a).

8.10. Найдите выпуклое вложение в плоскость графа G, показанного на рис. 1(b).

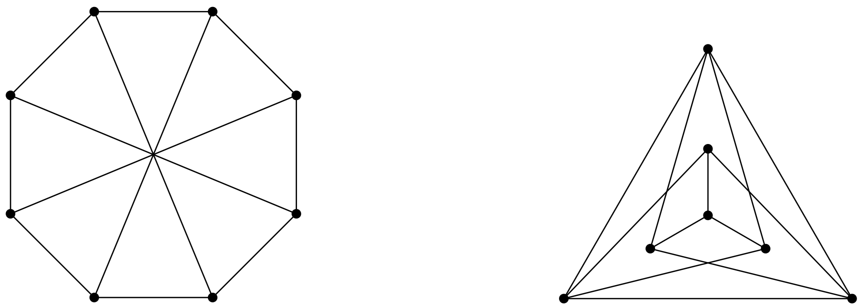
8.11. Для графа G, изображенного на рис. 2(a), найти выпуклое вложение G в плоскость или доказать его непланарность как с помощью формулы Эйлера, так и с помощью теоремы Куратовского.

8.12. Для графа G, изображенного на рис. 2(b), найти выпуклое вложение G в плоскость или доказать его непланарность как с помощью формулы Эйлера, так и с помощью теоремы Куратовского.



(a) (b)

Рис. 1



(a) (b)

Рис. 2

8.13. Граф G называется *внешнепланарным* (outerplanar graph), если для него существует такое вложение $\widetilde{G}$ в плоскость, что все его вершины лежат на границе его внешней грани. Докажите, что графы K_4 и $K_{2,3}$ не являются внешнепланарными.

8.14. Докажите, что если каждая из обыкновенных производящих функций $f(z)$ и $g(z)$ отлична от нуля, то и их произведение отлично от нуля.

8.15. Докажите формулу Ньютона–Лейбница для обыкновенных производящих функций $f(z)$ и $g(z)$:

$$(f(z) \cdot g(z))' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z).$$

С ее помощью докажите формулу интегрирования по частям:

$$\int (f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)) = f(z) \cdot g(z) - f(0) \cdot g(0).$$

8.16. С помощью обыкновенных производящих функций найдите числовую последовательность a_n, удовлетворяющую равенству

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n > 0. \end{cases} \tag{4}$$

8.17. С помощью обыкновенных производящих функций найдите числовую последовательность a_n, удовлетворяющую равенству

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 1, \qquad n \geqslant 0. \tag{5}$$

8.18. Получите явные выражения для коэффициентов обыкновенной производящей функции

$$f(z) = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}.$$

8.19. С помощью производящих функций докажите тождество

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = 4^n, \qquad n \geqslant 0. \tag{6}$$

8.20. С помощью производящих функций докажите тождество

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}, \qquad n \geqslant 0.$$

8.21. С помощью производящих функций докажите тождество

$$\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} n \binom{n}{n} = 0, \qquad n \geqslant 1.$$

8.22. С помощью производящих функций докажите тождество

$$\binom{n}{1} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \frac{1}{3}\binom{n}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \binom{n}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Указание. Рассмотрите интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{1-z^n}{1-z}\, dz$$

и сделайте в нем замену переменной $s = 1 - z$.