

Домашнее задание

Note: Во всех заданиях не забывайте про подробности.

1. Векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} ортогональны, вектор \mathbf{c} образует с ними углы по $\frac{\pi}{3}$. $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 5$, $|\mathbf{c}| = 8$, найти:
 - a) $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})(\mathbf{b} + 3\mathbf{c})$
 - b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2$
 - c) $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c})^2$
2. Определить геометрическое место концов переменного вектора \mathbf{x} , если его начало находится в данной точке \mathbf{p} и вектор \mathbf{x} удовлетворяет условию $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \lambda$, где \mathbf{a} — некоторый вектор и λ — некоторое число.
3. Предположим, что попарные углы между некоторыми векторами $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ больше $\frac{\pi}{2} + \alpha$, где $\alpha > 0$. Докажите, что $n < \frac{1}{\sin \alpha} + 1$. Указание: предположите, что вектора единичные, а потом покажите, что это не важно.
4. В \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), дано замкнутое выпуклое множество S , не содержащее точку $\mathbf{0}$ (ноль).
 - a) (не оценивается) покажите, что скалярное произведение непрерывно.
 - b) (не оценивается) выясните, какие множества задают уравнения $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0$ и $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) > 0$ для переменного \mathbf{x} и заданного \mathbf{v} .
 - c) докажите, что через $\mathbf{0}$ можно провести гиперплоскость (линейное подпространство размерности $n - 1$), не пересекающую S .