

Интегралы

1. Разминка

а)

$$\int 3^x 5^{2x} dx$$

б)

$$\int f(x) dx, f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 0 \\ x^2 - 2x, & x \geq 0 \end{cases}$$

2. Вычислите

а)

$$\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx$$

б)

$$\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx$$

в)

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

г)

$$\int x^2 \arcsin 2x dx$$

д)

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x - 2 \sin x + 1} dx$$

3. Вычислите

$$\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx$$

4. Выведите формулу понижения для

$$J_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$$

5. Доказать, что

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x| + C,$$

где A, B, C — некоторые постоянные

Указание: рассмотрите замену $t = a \sin x + b \cos x$

Интегралы

1. Вычислите

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2} dx$$

2. Вычислите

$$\int_0^{2\pi} \sin^{11} x \cos^4 x dx$$

3. Объяснить, почему формальное применение формулы Ньютона-Лейбница приводит к неверным результатам

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$$

4. Рассмотрим непрерывную функцию f . Найдите

a)

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx$$

b)

$$\frac{d}{db} \int_a^b f(x) dx$$

c)

$$\frac{d}{da} \int_a^b f(x) dx$$

5. Докажите, что если f непрерывная положительная функция, то функция

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$$

6. Вычислить интеграл

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$$

введя новую переменную $t = x + \frac{1}{x}$