Задание 3

4 февраля 2020 г.

1. Доказать, что для любых случайных величи $\alpha.\beta, \gamma$ выполнено неравенство:

$$H(\alpha) \leq H(\alpha|\beta) + H(\alpha|\gamma) + I(\beta : \gamma).$$

2. Покажите, что арифметический код является сбалансированным с константой 2. Более того покажите, что константу 2 нельзя заменить на 1.

3. Пусть $\alpha \to \beta \to \gamma$ образуют Марковскую цепь, т.е. распределение $\langle \gamma \mid \beta \rangle = \langle \gamma \mid \alpha, \beta \rangle$. Докажите, что $I(\alpha : \gamma) \leq I(\alpha : \beta)$ и $I(\alpha : \gamma) \leq I(\beta : \gamma)$.

4. Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — произвольный алфавит и $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — вероятности букв этого алфавита. Докажите, что для любого инъективного кодирования букв этого алфавита средняя длина кода не меньше $H - 2\log H - 2$. Здесь H — это энтропия распределения с вероятностями $p_1, p_2 \ldots p_n$.

5. Приведите пример совместного распределения случайных величин α, β, γ для которых неравенство:

$$H(\alpha, \gamma) + H(\beta, \gamma) \leq H(\alpha, \beta, \gamma) + H(\gamma)$$

неверно.

6. Известно, что случайные величины α и β отличаются с вероятностью ϵ. Более того величина α принимает не более a различных значений. Покажите, что

$$H(\alpha|\beta) \leq \epsilon \log(a) + h(\epsilon, 1 - \epsilon).$$