

Производная, монотонность, выпуклость

1. Найдите экстремум функции: $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$
2. Докажите неравенства:
 - a) $e^x > ex, x > 1$
 - b) $y \sin x > x \sin y, 0 < x < y < \pi$
 - c) $e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{e^x + e^y}{2}, x \neq y$
3. Сравните e^π и π^e
4. Найдите интервалы выпуклости и точки перегиба функции:
 - a) $\frac{x^2}{(x-2)^3}$
 - b) $\frac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$
5. Для произвольного набора $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ докажите:

$$\ln \left(1 + e^{\sum \frac{x_i}{n}} \right) \leq \frac{\sum \ln(1 + e^{x_i})}{n}$$

Интегралы

1. Вычислите:

a) $\int \frac{x}{1+x} dx$

b) $\int \frac{2}{1-x^2} dx$

c) $\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}} dx$

d) $\int \sin x \cos x dx$

e) $\int \sin^2 x dx$

f) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

g) $\int \ln x dx$

h) $\int x e^x dx$

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми $y(x) = e^x$, $y(x) = x^e$, $x = 0$