Выведите в исчислении предикатов или предоставьте оценку, в которой формула не выполняется:

1. $\forall x P(x) \vee \exists x \neg P(x)$
2. $\forall x \exists y (P(x) \to P(y))$
3. $(\forall x (P(x) \to Q(x))) \to \neg Q(y) \to \neg P(y)$
4. $Q(x) \to \exists y (P(y) \to \exists x Q(x))$
5. $\forall x \forall y (P(x) \to P(y)) \to \exists x P(x) \to \forall x P(x)$
6. $\exists y \forall x (P(x) \to P(y))$

Подсказка словами, как вывести первый пункт (слов много, чтобы было понятнее, какой ход мысли, а не потому что это сложно). Видно, что нельзя написать программу, которая бы выдавала для произвольного предиката P свидетельство его общезначимости или необщезначимости, а значит, это доказательство неконструктивное и надо пользоваться аксиомой 11: либо P выполняется для всех, либо неправда, что P выполняется для всех. Покажем, что требуемую формулу можно вывести для обоих случаев (A8). В первом случае всё доказано (A6); во втором случае хотим показать, что существует x, на котором не выполняется P (формула: $\neg \forall x P(x) \to \exists x \neg P(x)$). Это снова само по себе неконструктивное высказывание, потому что из знания необщезначимости формулы не следует конкретный контрпример. Воспользуемся снятием двойного отрицания и сведём задачу к демонстрации того, что не может быть $\neg \exists x \neg P(x)$. Действительно, у нас образовался противоречивый контекст: $\neg \forall x P(x)$, как мы знаем, несовместим с $\neg \exists x \neg P(x)$, а значит, надо (A10) найти какое-то высказывание W такое, что из контекста выводимо и оно, и его отрицание ($\neg \forall x P(x) \vdash (\neg \exists x \neg P(x) \to W) \to (\neg \exists x \neg P(x) \to \neg W) \to \neg\neg \exists x \neg P(x)$). Возьмём, например, $W = \forall x.P(x)$, потому что тогда вторую скобку легко доказать: достаточно взять посылку из контекста. Тогда нужно доказать $\neg \exists x \neg P(x) \to \forall x.P(x)$. По правилу Бернайса, для этого достаточно показать $\neg \exists y \neg P(y) \to P(a)$ для какого-то a. Но это опять неконструктивное высказывание. Разберём тогда, выполняется ли $P(a)$. Если да, то всё хорошо. Если нет, то имеем $\neg P(a)$. Если так, то имеем, по лемме 13, ещё и $\exists x \neg P(x)$. Но также в контексте есть $\neg \exists y \neg P(y)$, а значит, можно вывести что угодно (A9).