Домашнее задание 4. Перечислительная комбинаторика. Числа Стирлинга второго рода..

Баллов на зачёт: 8,5

1. (1,5 балла) Доказать комбинаторно формулу

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$$

2. (по 1 баллу) Найти сумму четырехзначных чисел, которые можно получить при всевозможных перестановках цифр а) $1, 2, 3, 4$; б) $1, 2, 2, 5$.

3. (1 балл) Доказать комбинаторно следующую формулу для чисел Стирлинга $S(n, 3)$:

$$S(n,3) = \frac{3^n - 3(2^n - 2) - 3}{6}.$$

4. (1,5 балла) Доказать, что числа Стирлинга $S(n, n-2)$ рассчитываются по формуле

$$S(n, n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24}.$$

5. (1,5 балла) Придумать комбинаторное доказательство формулы

$$k^n = \sum_{i=0}^{n} (k)_i \cdot S(n,i).$$

   Напоминание: Числом Белла $B(n)$ называется количество всех возможных разбиений n-элементного множества. Если разбить всевозможные разбиения на группы по количеству частей, на которые разбивается множество, то в каждой группе число разбиений будет выражаться числом Стирлинга второго рода. Отсюда получаем выражение для чисел Белла:

$$B(n) = \sum_{i=1}^{n} S(n,i)$$

6. (1,5 балла) Обозначим через $F(n)$ количество разбиений n-множества без блоков единичной длины. Докажите, что $B(n) = F(n) + F(n+1)$.

7. (2 балла) Доказать, что количество разбиений n-элементного множества, при котором ни в одном блоке не содержится пара последовательно идущих чисел, описывается числом Белла $B(n-1)$.

8. (2 балла) Восемь студентов выбирают себе спецкурсы на семестр из списка, состоящего из четырех спецкурсов. Сколькими способами студенты могут записаться на эти спецкурсы так, чтобы каждый студент записался хотя бы на один спецкурс и при этом на каждый спецкурс хоть кто-то записался?