

Домашнее задание

Note: Во всех заданиях не забывайте про подробности.

1. Найдите обратную матрицу, разложив на трансвекции $(t_{i,j}(k), m_i(k), s_{i,j})$, к матрице:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

2. Найдите матрицу перехода от базиса $1, x, \dots, x^n$ к базису $1, x - a, (x - a)^2, \dots, (x - a)^n$ в векторном пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ (многочлены степени не больше n).

(Note: условимся считать матрицей перехода матрицу, переводящую вектор нового базиса в старый, а не обратную ей.)

3. A, B — квадратные матрицы размера 2021 такие, что $A^2 = B^2 = 0$. Докажите, что найдётся столбец $x \in K^{2021}$, такой что $Ax = Bx = 0$.

4. Даны два отображения $A, B : V \rightarrow K$ (K — поле, над которым V). В каких диапазонах могут варьироваться ранги отображений? Покажите, что $A = tB$ для некоторого $t \in K$.

(Note: В этом вопросе политика против рукомахательных доказательств ослаблена. Предлагаю проявить максимум воображения.)