Курс: Функциональное программирование
Практика 3. Просто типизированное λ-исчисление.

Разминка

▶ Придумайте контекст Γ, в котором верны утверждения типизации

$$
\begin{array}{l}
\Gamma \vdash x : \alpha \\
\Gamma \vdash x\,y : \alpha \\
\Gamma \vdash x\,y : \alpha \to \beta \\
\Gamma \vdash \lambda x.\, y : \alpha \to \alpha \to \alpha \\
\Gamma \vdash \lambda x.\, y : (\alpha \to \beta) \to \alpha \\
\Gamma \vdash \lambda x.\, x : (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha \to \alpha \\
\Gamma \vdash \lambda x.\, x : (\alpha \to \beta) \to \alpha
\end{array}
$$

▶ Запишите приведённые выше утверждения типизации в стиле Чёрча.

Стандартные типы

▶ Какой общий тип можно приписать булевым значениям

$$
\begin{array}{lcl}
\mathtt{tru} & \equiv & \lambda t\,f.\, t \\
\mathtt{fls} & \equiv & \lambda t\,f.\, f
\end{array}
$$

Можно ли это сделать другими способами?

▶ Типизируйте комбинаторы `not` (обе версии), `if` и `and`.

▶ Какой тип можно приписать парам

$$\mathtt{pair} \equiv \lambda x\,y\,f.\, f\,x\,y$$

▶ Типизируйте комбинаторы `fst` и `snd`.

▶ Какой общий тип можно приписать числам Чёрча

$$
\begin{array}{lcl}
\mathtt{0} & \equiv & \lambda s\,z.\, z \\
\mathtt{1} & \equiv & \lambda s\,z.\, s\,z \\
\mathtt{2} & \equiv & \lambda s\,z.\, s\,(s\,z) \\
\mathtt{3} & \equiv & \lambda s\,z.\, s\,(s\,(s\,z)) \\
\mathtt{4} & \equiv & \lambda s\,z.\, s\,(s\,(s\,(s\,z))) \\
 & \dots &
\end{array}
$$

▶ Типизируйте комбинаторы `suc` (обе версии) и `iszero`.

▶ Какой тип можно приписать спискам

$$
\begin{aligned}
[\,] &\equiv \mathtt{nil} \equiv \lambda c\, n.\, n\\
[2] &\equiv \mathtt{cons}\ 2\ \mathtt{nil} \equiv \lambda c\, n.\, c\ 2\ n\\
[3,2] &\equiv \mathtt{cons}\ 3\ (\mathtt{cons}\ 2\ \mathtt{nil}) \equiv \lambda c\, n.\, c\ 3\ (c\ 2\ n)\\
[5,3,2] &\equiv \mathtt{cons}\ 5\ (\mathtt{cons}\ 3\ (\mathtt{cons}\ 2\ \mathtt{nil})) \equiv \lambda c\, n.\, c\ 5\ (c\ 3\ (c\ 2\ n))
\end{aligned}
$$

Вывод типа

Определите тип следующих комбинаторов

▶ $\mathbf{B} = \lambda f\, g\, x.\, f\,(g\, x)$

▶ $\mathbf{C} = \lambda f\, x\, y.\, f\, y\, x$

▶ $\mathbf{S} = \lambda f\, g\, x.\, f\, x\,(g\, x)$

Постройте для одного из них дерево вывода типа.

Определите тип комбинаторов

▶ $\lambda x\, y.\, x\,(y\, x\, x)$

▶ $\lambda x\, y.\, x\, y\, x$

Тип комбинатора неподвижной точки

Пусть мы решили расширить исчисление комбинатором неподвижной точки `fix` с правилом δ-редукции

$$\mathtt{fix}\ f \ \to_\delta\ f\,(\mathtt{fix}\ f)$$

▶ Какой тип можно было бы ему приписать непротиворечивым образом?

▶ В определении факториала

$$\color{blue}{\mathtt{fac}} = \lambda n.\, \mathtt{if}\,(\mathtt{iszro}\ n)\ 1\ (\mathtt{mult}\ n\,(\color{blue}{\mathtt{fac}}\,(\mathtt{pred}\ n)))$$

$$\color{blue}{\mathtt{fac}} = \underbrace{(\lambda \color{red}{f}\, n.\, \mathtt{if}\,(\mathtt{iszro}\ n)\ 1\ (\mathtt{mult}\ n\,(\color{red}{f}\,(\mathtt{pred}\ n))))}_{\mathtt{fac}'}\ \color{blue}{\mathtt{fac}}$$

$$\mathtt{fac} = \mathtt{fix}\ \mathtt{fac}'$$

найдите тип `fac`, $\mathtt{fac}'$ и `fix`. (Используйте сокращение `Nat` для типа чисел Черча.)

Экспансия субъекта

Операция, обратная β-редукции называется экспансией (расширением). Множество типизируемых в $\lambda\!\to$ термов не замкнуто относительно экспансии:

$$M \twoheadrightarrow_\beta N \;\wedge\; \Gamma \vdash N : \sigma \;\not\Rightarrow\; \Gamma \vdash M : \sigma$$

Действительно, рассмотрим терм $\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\boldsymbol{\Omega}$ ($\mathbf{I} \equiv \lambda x.\,x$, $\mathbf{K} \equiv \lambda x\,y.\,x$, $\boldsymbol{\Omega} \equiv \lambda x.\,x\,x$). Хотя $\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\boldsymbol{\Omega} \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{I}$:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\boldsymbol{\Omega} \;\to_\beta\; (\lambda y.\,\mathbf{I})\,\boldsymbol{\Omega} \;\to_\beta\; \mathbf{I}$$

и $\vdash \mathbf{I} : \sigma \to \sigma$, но $\nvdash \mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\boldsymbol{\Omega} : \sigma \to \sigma$, поскольку последнее содержит нетипизируемый подтерм.

Для $\lambda\!\to$ а ля Чёрч экспансия не сохраняет тип только из-за возможного наличия нетипизируемого подтерма.

Для $\lambda\!\to$ а ля Карри верно более сильное отрицание:

$$M \twoheadrightarrow_\beta N \;\wedge\; \Gamma \vdash M : \sigma \;\wedge\; \Gamma \vdash N : \tau \;\not\Rightarrow\; \Gamma \vdash M : \tau$$

Покажем это на примере.

Возьмём $M \equiv \mathbf{S}\,\mathbf{K}$ и $N \equiv \mathbf{K}_*$.

$$\begin{array}{rl}
\mathbf{S} \equiv \lambda f\,g\,z.\,f\,z\,(g\,z) & \vdash \mathbf{S} : (\sigma \to \tau \to \rho) \to (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho \\
\mathbf{K} \equiv \lambda x\,y.\,x & \vdash \mathbf{K} : \sigma \to \tau \to \sigma \\
 & \vdash (\mathbf{S}\,\mathbf{K}) : (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \sigma \\
\mathbf{K}_* \equiv \lambda x\,y.\,y & \vdash \mathbf{K}_* : \tau \to \sigma \to \sigma
\end{array}$$

$$\begin{array}{rll}
\mathbf{S}\,\mathbf{K} & \to_\beta & \lambda g\,z.\,\mathbf{K}\,z\,(g\,z) \;\to_\beta \\
 & \to_\beta & \lambda g\,z.\,(\lambda y.\,z)\,(g\,z) \to_\beta \lambda g\,z.\,z \;\equiv_\alpha\; \mathbf{K}_*
\end{array}$$

В красной редукции потерялась информация о типе g, как о функциональном, $(g\,z) : \tau \Rightarrow z : \sigma, g : \sigma \to \tau$.

Для $\lambda\!\to$ в стиле Чёрча информация не теряется:

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{S}_{\sigma\tau\rho} & \equiv & \lambda f^{\sigma\to\tau\to\rho}\,g^{\sigma\to\tau}\,z^{\sigma}.\,f\,z\,(g\,z) \\
\mathbf{K}_{\sigma\tau} & \equiv & \lambda x^{\sigma}\,y^{\tau}.\,x
\end{array}$$

$$\begin{array}{rll}
\mathbf{S}_{\sigma\tau\sigma}\,\mathbf{K}_{\sigma\tau} & \to_\beta & \lambda g^{\sigma\to\tau}\,z^{\sigma}.\,\mathbf{K}_{\sigma\tau}\,z\,(g\,z) \;\to_\beta \\
 & \to_\beta & \lambda g^{\sigma\to\tau}\,z^{\sigma}.\,(\lambda y^{\tau}.\,z)\,(g\,z) \;\to_\beta\; \lambda g^{\sigma\to\tau}\,z^{\sigma}.\,z \\
 & \equiv_\alpha & \lambda x^{\sigma\to\tau}\,y^{\sigma}.\,y \;\equiv\; \mathbf{K}_{*(\sigma\to\tau)\sigma}
\end{array}$$

Можно переименовать связанные переменные, но не их типы.

Домашнее задание

Если не указано иное, в задачах подразумевается простая система типов в стиле Карри.

Найдите замкнутые термы в нормальной форме, являющиеся обитателями типа (1 балл)
- ▶ $\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$
- ▶ $\alpha \to \beta \to \gamma \to \beta$
- ▶ $\alpha \to \beta \to \alpha \to \alpha$
- ▶ $\alpha \to \alpha \to \alpha \to \alpha$

Сколько разных с точностью до α-эквивалентности нормализованных термов каждого типа вы можете привести?

Найдите замкнутые термы в нормальной форме, являющиеся обитателями типа (2 балла)
- ▶ $(\delta \to \delta \to \alpha) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\delta \to \beta) \to \delta \to \gamma$
- ▶ $(\delta \to \delta \to \alpha) \to (\gamma \to \alpha) \to (\alpha \to \beta) \to \delta \to \gamma \to \beta$ (2 штуки)

Типизируйте по Чёрчу (2 балла)
- ▶ **S K K**
- ▶ **S K I**

(Обратите внимание, что в задании НЕТ указания редуцировать терм.)

Сконструируйте замкнутый, находящийся в нормальной форме терм типа
- ▶ $(\gamma \to \epsilon) \to ((\gamma \to \epsilon) \to \epsilon) \to \epsilon$

которому нельзя было бы приписать тип $\alpha \to (\alpha \to \epsilon) \to \epsilon$. (2 балла)

Сконструируйте замкнутый, находящийся в нормальной форме терм типа
- ▶ $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \beta) \to \alpha$
- ▶ $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \beta) \to \beta$

(3 балла)