1. Расставьте все скобки в выражениях:

   (a) $\forall x \exists y \forall z P(x) \to Q(y) \to P(z)$

   (b) $\forall x P(x) \wedge P(x)$

   (c) $\forall x \neg P(x) \wedge P(x)$

   (d) $\forall x P(x) \wedge \exists x P(x)$

   (e) $P(y) \to P(z) \to \exists x Q(x) \to Q(z)$

2. В каждой формуле переименуйте переменные так, чтобы смысл не изменился, но не происходило перекрытие имён. Например, в формуле $(\forall x P(x)) \to (\forall x Q(x))$ имя x используется для двух разных переменных, и её можно переделать в $(\forall x_1 P(x_1)) \to (\forall x_2 Q(x_2))$ без изменения смысла.

   (a) $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$

   (b) $\forall x \forall x P(x)$

   (c) $P(x) \wedge Q(x)$

   (d) $\forall x P(x) \to Q(x)$

   (e) $\exists x \forall x (\forall x (P(x) \vee \forall x \exists x Q(x)))$

3. Задайте сигнатуру логики высказываний. Запишите в ней высказывание: “дизъюнкция любых трёх элементов ассоциативна, а также конъюнкция дистрибутивна относительно дизъюнкции любых двух элементов; помимо этого, для каждого значения x можно найти такое y, что конъюнкция x и y будет эквивалентна $p \wedge \neg p$ для любого p”. Перечислите:

   - Термы этой формулы;
   - Атомарные формулы, входящие в состав этой формулы.

4. Найдите в каждом задании по две интерпретации сигнатуры; обе должны удовлетворять заданным аксиомам на любой оценке, но в одной должно на любой оценке выполняться высказывание P, а для второй должна существовать оценка, на которой оно не выполняется.

   (a) **Предикатные символы** $=^2$, $\leq^2$.
   Функциональные символы Никаких.
   Аксиомы
   - $\forall x (x \leq x)$;
   - $\forall x \forall y (x \leq y \to y \leq x \to x = y)$.

   P $\forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x)$.

   (b) **Предикатные символы** $=^2$.
   Функциональные символы inv^1, $\times^2$, I^0.
   Аксиомы
   - $\forall x (x \times \mathrm{inv}(x) = I)$;
   - $\forall x (x \times I = x)$.

   P $\forall x (x = \mathrm{inv}(x))$.

   Есть Haskell-заготовка.

5. Введём понятие *конгруэнции* в данной интерпретации данной сигнатуры как отношения, удовлетворяющего следующим требованиям:

   - *Рефлексивность*: каждый элемент в отношении с собой.
   - *Симметричность*: если x в отношении с y, то y в отношении с x.
   - *Транзитивность*: если x в отношении с y, а y, в свою очередь, в отношении с z, то x в отношении с z.

- *Конгруэнтность*:
  - Если a_i в отношении с b_i для любого i, а f — это n-арный функциональный символ, то $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ в отношении с $f(b_1, b_2, \cdots, b_n)$.
  - Если a_i в отношении с b_i для любого i, а p — это n-арный предикатный символ, то $p(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leftrightarrow p(b_1, b_2, \cdots, b_n)$.

Возьмём сигнатуру из 4b. Хотим, чтобы предикат $=^2$ был конгруэнцией. Запишите данное желание в виде формулы в этой сигнатуре (можно текстом, можно на Хаскелле); иными словами, напишите формулу такую, что если она оценивается в истину, то $=^2$ интерпретируется как конгруэнция.