

**Курс: Функциональное программирование**  
**Практика 1. Чистое лямбда-исчисление как язык**  
**программирования**

**Разминка**

- Выделите свободные и связанные переменные в термах и выполните указанные подстановки:

$$[x \mapsto w (\lambda x. w x)] \quad x y (\lambda z y. z x (w x) y)$$

$$[y \mapsto w (\lambda x. w x)] \quad x y (\lambda z y. z x (w x) y)$$

$$[z \mapsto w (\lambda x. w x)] \quad x y (\lambda z y. z x (w x) y)$$

$$[x \mapsto w (\lambda x. y x)] \quad x y (\lambda z y. z x (w x) y)$$

Определите, возможно ли в получившемся терме выполнить  $\beta$ -преобразование.

- Уберите лишние скобки и при возможности выполните  $\beta$ -преобразование

$$((\lambda z. (z (y z))) (z x) z)$$

- Эквивалентны ли термы:

$$\lambda x. x$$

$$\lambda y. y$$

$$\lambda x y. x y$$

**Булевы значения** можно определить так:

$$\text{tru} \equiv \lambda t f. t$$

$$\text{fls} \equiv \lambda t f. f$$

Стандартные булевы операции кодируются так:

$$\text{if} \equiv \lambda b x y. b x y$$

$$\text{not} \equiv \lambda b. b \text{ fls} \text{ tru}$$

$$\text{and} \equiv \lambda x y. x y \text{ fls}$$

$$\text{or} \equiv ??? \text{ (упражнение)}$$

► Проверьте, что ожидаемые свойства условного выражения выполняются:

$$\begin{aligned}\text{if tru } v \ w &= v; \\ \text{if fls } v \ w &= w.\end{aligned}$$

► Проверьте, что ожидаемые свойства логического оператора «И» выполняются:

$$\begin{aligned}\text{and tru } w &= w; \\ \text{and fls } w &= \text{fls}.\end{aligned}$$

► Попробуйте найти более «короткую» версию оператора «НЕ».  
► Реализуйте оператор «ИЛИ».

**Пару** (двухэлементный кортеж) можно определить так:

$$\text{pair} \equiv \lambda x y f. f x y$$

Стандартные операции для пары (проекции):

$$\begin{aligned}\text{fst} &\equiv \lambda p. p \ \text{tru} \\ \text{snd} &\equiv \lambda p. p \ \text{fls}\end{aligned}$$

► Проверьте, что ожидаемые свойства проекций выполняются:

$$\begin{aligned}\text{fst} (\text{pair } a \ b) &= a; \\ \text{snd} (\text{pair } a \ b) &= b.\end{aligned}$$

**Числа** (нумералы Чёрча)

$$\begin{aligned}0 &\equiv \lambda s z. z \\ 1 &\equiv \lambda s z. s z \\ 2 &\equiv \lambda s z. s (s z) \\ 3 &\equiv \lambda s z. s (s (s z)) \\ 4 &\equiv \lambda s z. s (s (s (s z))) \\ &\dots\end{aligned}$$

Выражение  $F^n(X)$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , а  $F, X \in \mathcal{L}$ , определим индуктивно:

$$\begin{aligned}F^0(X) &\equiv X; \\ F^{n+1}(X) &\equiv F(F^n(X)).\end{aligned}$$

Тогда  $n$ -ое число Чёрча :

$$n \equiv \lambda s z. s^n(z).$$

Проверка числа на ноль ( $0 \equiv \lambda s z. z$ ):

$$iszro \equiv \lambda n. n (\lambda x. fls) tru$$

- ▶ Проверьте, что ожидаемые свойства `iszro` выполняются.
- ▶ Попробуйте найти более «короткую» версию `iszro`.

Функция следования для чисел Чёрча

$$succ \equiv \lambda n s z. s (n s z)$$

- ▶ Проверьте, что ожидаемые свойства `succ` выполняются.
- ▶ Попробуйте найти другое определение `succ`.

Функция сложения чисел Чёрча

$$plus \equiv \lambda m n s z. m s (n s z)$$

- ▶ Проверьте, что ожидаемые свойства `plus` выполняются.
- ▶ Попробуйте найти определение `plus` с использованием `succ`.

Функция умножения чисел Чёрча

$$mult1 \equiv \lambda m n. m (plus n) 0$$

$$mult2 \equiv \lambda m n s z. m (n s) z$$

- ▶ Проверьте, что ожидаемые свойства умножения выполняются.
- ▶ Можно ли `mult2` записать короче?

## Домашнее задание

► Выделите свободные и связанные переменные в термах и выполните указанные подстановки:

$$\begin{aligned} [x \mapsto \lambda y. y w] \quad & \lambda y z. x y w (z x) \\ [x \mapsto \lambda z. z] \quad & \lambda x y. x y (\lambda x. x y) x \\ [y \mapsto x z] \quad & x y (\lambda x z. x y z) y \end{aligned}$$

Определите, возможно ли в получившемся терме выполнить  $\beta$ -преобразование, и, если это так, выполните его. (1 балл)

► Уберите лишние скобки и при возможности выполните  $\beta$ -преобразование

$$\begin{aligned} & (x (\lambda x. ((x y) x)) y) \\ & ((\lambda p. (\lambda q. ((q (p r)) s))) ((q (p r)) s)) \end{aligned}$$

(1 балл)

► Покажите, что для любых  $M$  и  $N$  выполняется

$$\lambda x. M N = S (\lambda x. M) (\lambda x. N)$$

(1 балл)

► Покажите, что

$$\begin{aligned} S K K &= I \\ B &= S (K S) K \end{aligned}$$

(2 балла)

► Реализуйте функцию возведения в степень для чисел Чёрча. (2 балла)