1 Упражнения на совершенные графы и хроматический многочлен

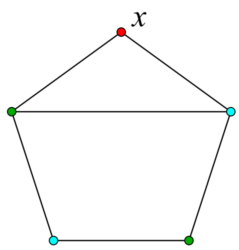


Рис. 1

1.1. Докажите, что граф G, показанный на рис. 1, является совершенным графом.

1.2. Является ли граф C_{2n}, $n \geqslant 2$, совершенным?

1.3. Докажите, что для всех $k \geqslant 2$ справедливы неравенства

$$\chi(C_{2k+1}) > \omega(C_{2k+1}) \qquad \text{и} \qquad \chi(\bar{C}_{2k+1}) > \omega(\bar{C}_{2k+1}).$$

Из этих неравенств, в частности, следует, что как циклы нечетной длины, отличные от $K_3 = C_3$, так и их дополнения совершенными графами не являются.

1.4. Предположим, что верно следующее утверждение: граф G является совершенным тогда и только тогда, когда для любого индуцированного подграфа H графа G выполняется неравенство

$$|V(H)| \leqslant \alpha(H) \cdot \omega(H).$$

Докажите, что из этого утверждения следует теорема о совершенном графе.

1.5. Докажите, что любой двудольный граф $G[X, Y]$ является совершенным графом.

1.6. Докажите, что в двудольном графе G выполняется $\alpha(G) = \vartheta(G)$.

1.7. Докажите, что дополнение к двудольному графу является совершенным графом.

1.8. Напомним, что реберным графом (line graph) $L(G)$ графа G называется граф, вершинам которого соответствуют ребра графа G. При этом две вершины $e, f \in L(G)$ реберного графа смежны в $L(G)$, если они имеют общую концевую вершину в графе G. Докажите, что реберный граф любого двудольного графа является совершенным.

1.9. Чему равняется хроматический многочлен $P(z)$ для леса, состоящего из k деревьев и построенного на $n \geqslant k$ вершинах?

1.10. Пусть подграфы H_1 и H_2 графа $G = H_1 \cup H_2$ имеют единственную общую вершину x, т. е. $V(G) \cap V(H) = \{x\}$. Покажите, что

$$P_G(z) = \frac{P_{H_1}(z) \cdot P_{H_2}(z)}{z}.$$

Обобщите полученный результат на связный граф G, состоящий из m двусвязных блоков B_m.

1.11. Докажите, что при вычислении хроматического полинома по формуле

$$P_{G-e}(z) = P_G(z) + P_{G/e}(z) \tag{1}$$

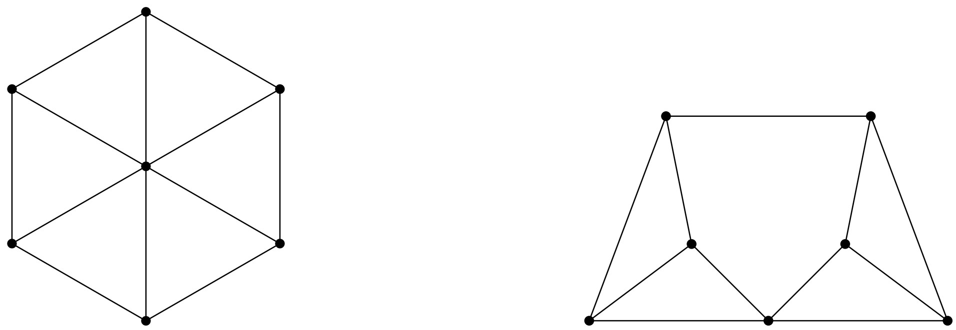
все получающиеся в процессе стягивания ребер мультиребра можно заменять на одиночные ребра.

1.12. Докажите, что если к одной из вершин x графа примыкает одиночное ребро $e = \{x, y\}$, соединяющее эту вершину с некоторым листом y, то хроматический многочлен данного графа связан с хроматическим многочленом графа $G - e$ соотношением

$$P_G(z) = (z-1) \cdot P_{G-e}(z).$$

1.13. Докажите, что хроматический полином простого цикла C_n длины n рассчитывается по формуле

$$P_{C_n}(z) = (-1)^n(z-1) + (z-1)^n.$$



(a) (b)

Рис. 2

1.14. Подсчитайте хроматический полином для графа W_n “колесо” (рис. 2(a)).

1.15. Подсчитать хроматический полином $P_G(z)$ для графа, показанного на рис.2,b.

1.16. Пусть $e = \{x, y\}$ — произвольное ребро в хордальном графе G, принадлежащее некоторому циклу C. Докажите, что в G найдется такая вершина z, что x, y, z образуют треугольник в графе G.

1.17. Пусть в графе G имеется мост $e \in E(G)$. Доказать, что в этом случае полиномы $P_G(z)$ и $P_{G-e}(z)$ связаны равенством

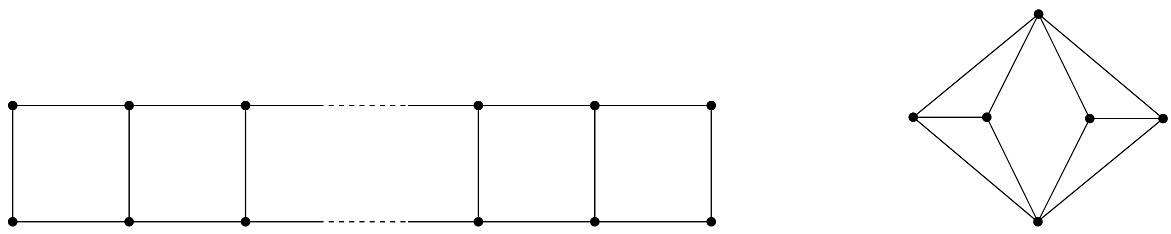
$$P_G(z) = \frac{z-1}{z} P_{G-e}(z).$$

1.18. Вычислить полином Татта для цикла C_n.

1.19. Подсчитать хроматический полином для графа G_n “лестница” (рис.3,a), построенного на $2n$ вершинах.

1.20. Подсчитать хроматический полином для графа G, показанного на рис.3,b.

1.21. Предположим, что любое минимальное вершинно разделяющее пару несмежных вершин x, y множество S представляет собой клику в графе G. Доказать, что G является хордальным графом.



(a) (b)

Рис. 3

1.22. Докажите, что если числа от 1 до 9 покрасить в два цвета, то среди этих чисел обязательно найдутся три числа одного цвета, образующие арифметическую прогрессию.

1.23. Докажите, что в перестановке длины $mn+1$ найдется либо возрастающая последовательность длины $n+1$ либо убывающая последовательность длины $m+1$.

1.24. Каждая точка трёхмерного пространства покрашена либо в красный либо в чёрный цвет. Докажите, что в этом пространстве найдётся либо единичный квадрат, все вершины которого чёрные, либо единичный квадрат, у которого не меньше трёх красных вершин.

1.25. Докажите оценку для числа Рамсея: $R(n+2,3) > 3n$ при $n > 1$.

1.26. Точки плоскости покрашены в три цвета. Докажите, что найдется единичный отрезок, оба конца которого покрашены в один цвет.