

Урновые схемы и схемы раскладки предметов по ящикам. Подсчет количества отображений конечных множеств. Числа Стирлинга второго рода.

1.1. Получите явные аналитические выражения для чисел Стирлинга $S(n, 1)$, $S(n, n)$, $S(n, 2)$ и $S(n, n - 1)$.

1.2. Сколькими способами можно расставить 20 различных книг по пяти различным полкам при условии, что каждая полка может вместить все эти двадцать книг?

1.3. Восемь студентов выбирают себе спецкурсы на семестр из списка, состоящего из четырех спецкурсов. Сколькими способами студенты могут записаться на эти спецкурсы так, чтобы каждый студент записался хотя бы на один спецкурс?

1.4. Предположим теперь, что в предыдущей задаче мы дополнительно требуем, чтобы на любой спецкурс записался хотя бы один студент. Сколько существует способов это сделать?

1.5. Докажите, что числа Стирлинга $S(n, n - 2)$ рассчитываются по формуле

$$S(n, n - 2) = \frac{n(n - 1)(n - 2)(3n - 5)}{24}.$$

1.6. Дайте комбинаторное доказательство следующего рекуррентного соотношения для чисел Стирлинга:

$$S(n, k) = \sum_{i=1}^n S(n - i, k - 1) k^{i-1}, \quad n \geq k.$$

1.7. Найдите сумму четырехзначных чисел, которые можно получить при всевозможных перестановках цифр а) 1, 2, 3, 4; б) 1, 2, 2, 5.

1.8. Предположим, что нам нужно разместить r натуральных чисел $1, 2, \dots, r$ и $n - r$ нулей, $r < n$, в циклическом порядке так, чтобы при движении по часовой стрелке последовательность натуральных чисел всегда была бы возрастающей, и так, чтобы никакие два последовательно идущих натуральных числа $i, i + 1$, не шли бы друг за другом (включая пару $(r, 1)$). Например, при $n \geq 2$ и $r = 1$ мы можем на любую из n позиций поставить единицу, а оставшиеся позиции заполнить нулями. Так как все такие размещения переходят в себя при вращениях по часовой стрелке, то всего имеется ровно одно подобное размещение при любом $n \geq 2$. В случае $r = 2, n = 4$ у нас имеется единственное с точностью до циклического сдвига устраивающее нас размещение $(1, 0, 2, 0)$, а в случае $r = 2$ и $n = 5$ таких размещений в точности два — $(1, 0, 2, 0, 0)$ и $(1, 0, 0, 2, 0)$. Подсчитайте количество описанных размещений при произвольных значениях параметров n и r .