

# Интегралы и ряды

1. Исследуйте на сходимость

$$\int_0^8 \frac{1}{x^2 + \sqrt[3]{x}} dx$$

2. Исследуйте на сходимость

$$\int_0^1 \ln |1 - 4 \sin^2 x| dx$$

3. При каких  $\alpha, \beta$  сходится интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cos^\beta x dx$$

4. Пусть интеграл  $\int_0^\infty f(x) dx$  сходится. Следует ли из этого, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  ?

5. Вычислите ряд

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, |q| < 1$$

b)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^n |q| < 1$$

6. Докажите сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4 2n}{(n+1)(n+2)}$$

7. Сходится ли следующий ряд?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

8. Исследовать на сходимость ряды

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + n^4}{3^n + \ln^2(n+1)}$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$$

d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}$$

9. Пользуясь признаками Даламбера и Коши исследовать сходимость рядов

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n}{n+5} \right) \left( \frac{n+2}{n+3} \right)^{n^2}$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{2} - \sqrt[3]{2} \right) \left( \sqrt{2} - \sqrt[5]{2} \right) \dots \left( \sqrt{2} - \sqrt[2^{n+1}]{2} \right)$$

10. Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  сходится. Докажите, что сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$

11. Найдите все значения  $\alpha$  при которых сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - n \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right)^\alpha$

12. (\*) Докажите сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( 2 - \sqrt[3]{2} \right) \left( 2 - \sqrt[5]{2} \right) \dots \left( 2 - \sqrt[2^{n+1}]{2} \right)$$

Докажите сперва, что  $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$