

# Типы в языках программирования

## Лекция 12. Логические системы

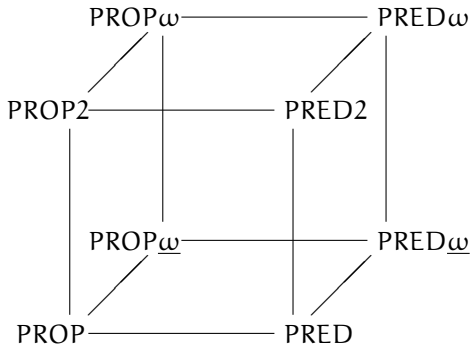
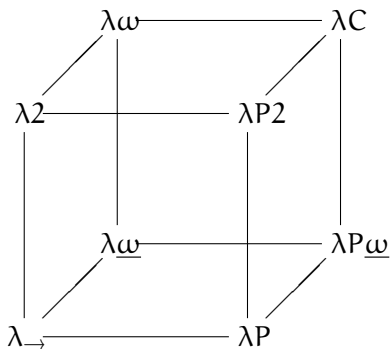
Денис Николаевич Москвин

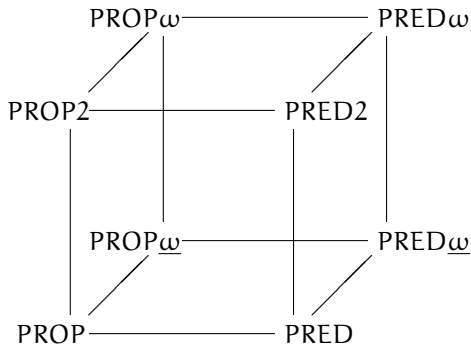
ИТМО, корпоративная магистратура JetBrains  
Разработка ПО / Software Engineering

26.05.2021

- 1 Логический куб
- 2 Logical Framework
- 3 HOL
- 4  $\lambda$ HOL: выразимость логических связей

- 1 Логический куб
- 2 Logical Framework
- 3 HOL
- 4  $\lambda$ HOL: выразимость логических связей





PROP proposition logic; PROP2 second-order proposition logic;  $\text{PROP}_\omega$  weakly higher-order proposition logic;  $\text{PROP}_\omega$  higher-order proposition logic; PRED predicate logic; PRED2 second-order predicate logic;  $\text{PRED}_\omega$  weakly higher-order predicate logic;  $\text{PRED}_\omega$  higher-order predicate logic.

- Системы на логическом кубе задают минимальные многосортные логики.
- Многосортные — в предикатных логиках формулы строят из атомарных разных сортов, то есть в сигнатуру входят несколько «базовых типов».
- Минимальные — только одна связка (импликация) и один квантор (общности).
- Однако, начиная со PROP2, мы можем выразить  $\perp$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$  и  $\neg$ .
- Начиная с PRED2, можем выразить квантор  $\exists$  и равенство Лейбница  $=_L$ :

$$\begin{aligned}\exists x^S. A &\equiv \Pi \gamma^{*P}. (\Pi x^S. A \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma \\ x =_L y &\equiv \Pi P^{S \rightarrow *P}. P x \rightarrow P y\end{aligned}$$

- Пусть  $A$  — высказывание некоторой логики  $L$ .
- Пусть  $[[A]]$  — интерпретация  $A$  (тип) в некоторой системе типов.
- Основные метатеоретические проблемы:
  - **корректность** (soundness):  
Если  $A$  — доказуемо в  $L$ , то  $[[A]]$  — обитаем.
  - **полнота** (completeness):  
Если  $[[A]]$  — обитаем, то  $A$  — доказуемо в  $L$ .
- **Корректность.**  
Имеет место для всех вершин  $\lambda$ -куба.
- **Полнота.**
  - Имеет место для левой грани куба.
  - При некоторых оговорках (недопустимость пустого домена) выполняется для  $\lambda P$ .
  - Не имеет места для  $\lambda P\omega$ : неразличимость  $*^S$  и  $*^P$  приводит к странным конструкциям (см. диссертацию Herman Geuvers, Logics and Type Systems).

- Идея доказательств такая: построить PTS максимально точно описывающую логическую систему, и доказывать полноту и корректность в два этапа.
- Например, для PRED строим эквивалентную PTS  $\lambda$ PRED

$\lambda P$	$\begin{array}{l} \mathcal{S} \quad *, \square \\ \mathcal{A} \quad *: \square \\ \mathcal{R} \quad (*, *), (*, \square) \end{array}$	$\lambda$ PRED	$\begin{array}{l} \mathcal{S} \quad *^P, *^S, *^f, \square^P, \square^S \\ \mathcal{A} \quad *^P: \square^P, *^S: \square^S \\ \mathcal{R} \quad (*^P, *^P), (*^S, *^P), (*^S, \square^P), \\ \quad (*^S, *^S, *^f), (*^S, *^f, *^f) \end{array}$
-------------	---	----------------	---

а потом доказываем «равномощность»  $\lambda$ PRED и  $\lambda P$ , используя подходящее стирающее отображение.



- 1 Логический куб
- 2 Logical Framework
- 3 HOL
- 4  $\lambda$ HOL: выразимость логических связей

- Два способа представления логических систем в системах типов
  - **Прямое представление:**  
одна система типов — одна логика;
  - **Logical Framework** (De Bruijn):  
одна система типов — много логик.
- Мы уже знакомы с прямым представлением: соответствие Карри-Говарда позволяло использовать  $\lambda_{\rightarrow}$ ,  $\lambda 2$ ,  $\lambda P$  как логические системы.
- **Logical Framework строится на основе  $\lambda P$ .** Но не обязательно!
- Логические связки и их правила введения и удаления:
  - **Прямое представление:**  
из системы типов;
  - **Logical Framework:**  
из заданного контекста.

- Вводится специальный тип для высказываний `prop`:

$$\text{prop} : *$$

- Импликация «связывает» два высказывания

$$\Rightarrow : \text{prop} \rightarrow \text{prop} \rightarrow \text{prop}$$

- Импликацию будем записывать инфиксно

$$x^{\text{prop}}, y^{\text{prop}} \vdash x \Rightarrow y : \text{prop}$$

- Конструктор типа (типовый оператор)

$$T : \text{prop} \rightarrow *$$

«поднимает» имя высказывания  $p : \text{prop}$  в тип его доказательства  $T p : *$ .

- Для  $T$  используют и другое обозначение  $\text{prf}$ .
- Населенность типа  $T p$  ( $\text{prf}(p)$ ) соответствует доказуемости высказывания  $p$ .
- Введение и удаление импликации

$$\text{imp\_intr} : \Pi a^{\text{prop}}. \Pi b^{\text{prop}}. (T a \rightarrow T b) \rightarrow T (a \Rightarrow b)$$

$$\text{imp\_elim} : \Pi a^{\text{prop}}. \Pi b^{\text{prop}}. T (a \Rightarrow b) \rightarrow T a \rightarrow T b$$

Например, доказательство, что из  $a$  следует  $a$ :

Представление логики	Формула	Доказательство
Прямое кодирование	$a \rightarrow a$	$\lambda x^a. x$
LF-вложение	$T(a \Rightarrow a)$	$\text{imp\_intr } a \ a \ (\lambda x^{T^a}. x)$

# PROP через LF в $\lambda P$ (4)

Контекст — сигнатура для PROP:

$$\begin{aligned}\Sigma_{\text{PROP}} \equiv & \text{prop}^*, \\ & T^{\text{prop} \rightarrow *}, \\ & \Rightarrow^{\text{prop} \rightarrow \text{prop} \rightarrow \text{prop}}, \\ & \text{imp\_intr} : \Pi a^{\text{prop}}. \Pi b^{\text{prop}}. (T a \rightarrow T b) \rightarrow T (a \Rightarrow b) \\ & \text{imp\_elim} : \Pi a^{\text{prop}}. \Pi b^{\text{prop}}. T (a \Rightarrow b) \rightarrow T a \rightarrow T b\end{aligned}$$

**Теорема.** LF-кодирование PROP в  $\lambda P$  корректно, то есть

$$\begin{aligned}\vdash_{\text{PROP}} p \Rightarrow \exists M, a_1, \dots, a_n. \\ \Sigma_{\text{PROP}}, a_1^{\text{prop}}, \dots, a_n^{\text{prop}} \vdash_{\lambda P} M : Tp\end{aligned}$$

**Теорема.** LF-кодирование PROP в  $\lambda P$  полно, то есть

$$\Sigma_{\text{PROP}}, a_1^{\text{prop}}, \dots, a_n^{\text{prop}} \vdash_{\lambda P} M : Tp \Rightarrow \vdash_{\text{PROP}} p$$

- **Пример.** Докажем, что  $a \Rightarrow b \Rightarrow a$ .
- Пусть  $\Gamma \equiv \Sigma_{\text{PROP}}, a^{\text{PROP}}, b^{\text{PROP}}$ , тогда

$$\Gamma, x^{T^a} \vdash (\lambda y^{T^b}. x) : T b \rightarrow T a$$

$$\Gamma, x^{T^a} \vdash \text{imp\_intr } b \ a \ (\lambda y^{T^b}. x) : T (b \Rightarrow a)$$

$$\Gamma \vdash \lambda x^{T^a}. \text{imp\_intr } b \ a \ (\lambda y^{T^b}. x) : T a \rightarrow T (b \Rightarrow a)$$

$$\Gamma \vdash \text{imp\_intr } a \ (b \Rightarrow a) \ (\lambda x^{T^a}. \text{imp\_intr } b \ a \ (\lambda y^{T^b}. x)) : T (a \Rightarrow (b \Rightarrow a))$$

$$\Gamma \vdash \text{imp\_intr } [] \ [] \ (\lambda x^{T^a}. \text{imp\_intr } [] \ [] \ (\lambda y^{T^b}. x)) : T (a \Rightarrow b \Rightarrow a)$$

- для справки

$$\text{imp\_intr} : \Pi a^{\text{PROP}}. \Pi b^{\text{PROP}}. (T a \rightarrow T b) \rightarrow T (a \Rightarrow b)$$

Контекст для логики предикатов:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{PRED}} \equiv & \text{prop}^*, T^{\text{prop} \rightarrow *}, A^*, f^{A \rightarrow A}, \\ & R^{A \rightarrow A \rightarrow \text{prop}}, \Rightarrow^{\text{prop} \rightarrow \text{prop} \rightarrow \text{prop}}, \\ & \text{imp\_intr} : \Pi a^{\text{prop}}. \Pi b^{\text{prop}}. (T a \rightarrow T b) \rightarrow T (a \Rightarrow b), \\ & \text{imp\_elim} : \Pi a^{\text{prop}}. \Pi b^{\text{prop}}. T (a \Rightarrow b) \rightarrow T a \rightarrow T b, \\ & \forall^{(A \rightarrow \text{prop}) \rightarrow \text{prop}}, \\ & \forall\_intr : \Pi P^{A \rightarrow \text{prop}}. (\Pi x^A. T (P x)) \rightarrow T (\forall P), \\ & \forall\_elim : \Pi P^{A \rightarrow \text{prop}}. T (\forall P) \rightarrow \Pi x^A. T (P x) \end{aligned}$$

- Квантификация  $\forall x \in A. P x$  представляется как  $\forall(\lambda x^A. P x)$ .
- *Предикаты — обычные функции, а не типовые операторы!*
- **Теорема.** LF-кодирование PRED в  $\lambda P$  корректно и полно.



- *Пример.* Докажите, что

$$\forall z \in A. (\forall x, y \in A. R x y) \Rightarrow R z z$$

- *Решение.* Тип этого утверждения в LF:

$$T(\forall(\lambda z^A. (\forall(\lambda x^A. (\forall(\lambda y^A. R x y)))) \Rightarrow R z z))$$

- Терм этого типа:

$$\forall\_intr \_ [ ] (\lambda z^A. \text{imp\_intr } \_ [ ] [ ] (\lambda f^{T(\forall(\lambda x^A. (\forall(\lambda y^A. R x y)))}). \\ \forall\_elim \_ [ ] (\forall\_elim \_ [ ] f z) z))$$

- для справки

$$\text{imp\_intr} : \Pi a^{\text{prop}}. \Pi b^{\text{prop}}. (T a \rightarrow T b) \rightarrow T (a \Rightarrow b)$$

$$\forall\_intr : \Pi P^{A \rightarrow \text{prop}}. (\Pi x^A. T (P x)) \rightarrow T (\forall P)$$

$$\forall\_elim : \Pi P^{A \rightarrow \text{prop}}. T (\forall P) \rightarrow \Pi x^A. T (P x)$$

- 1 Логический куб
- 2 Logical Framework
- 3 HOL
- 4  $\lambda$ HOL: выразимость логических связей

# PTS: аксиомы и правила для $\Gamma \vdash M : A$ (1)

Нотация присваивания типов  $\Gamma \vdash M : A$  задаётся так

Аксиомы	$\frac{}{\Gamma \vdash c : s}$ , если $(c:s) \in \mathcal{A}$
Начальное правило	$\frac{\Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x^A \vdash x : A}$ , если $x \equiv^s x \notin \Gamma$
Правило ослабления	$\frac{\Gamma \vdash M : A \quad \Gamma \vdash B : s}{\Gamma, x^B \vdash M : A}$ , если $x \equiv^s x \notin \Gamma$

Здесь  $s \in \mathcal{S}$ ,  $c \in \mathcal{C}$ ,  $x \in \mathcal{V}$  и  $A, B, M \in \mathcal{L}$ .

(продолжение далее...)

# PTS: аксиомы и правила для $\Gamma \vdash M : A$ (2)

Правило произведения 
$$\frac{\Gamma \vdash A : s_1 \quad \Gamma, x^A \vdash B : s_2}{\Gamma \vdash \Pi x^A. B : s_3},$$
 где  $(s_1, s_2, s_3) \in \mathcal{R}$

Правило применения 
$$\frac{\Gamma \vdash M : \Pi x^A. B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : [x \mapsto N]B}$$

Правило абстракции 
$$\frac{\Gamma, x^A \vdash M : B \quad \Gamma \vdash \Pi x^A. B : s}{\Gamma \vdash \lambda x^A. M : \Pi x^A. B}$$

Правило преобразования 
$$\frac{\Gamma \vdash M : A \quad \Gamma \vdash B : s \quad A =_{\beta} B}{\Gamma \vdash M : B}$$

Здесь  $s, s_1, s_2, s_3 \in \mathcal{S}$ ,  $x \in V$  и  $A, B, M, N \in \mathcal{L}$ .

- $\lambda$ HOL — система с прямым кодированием логики.
- В LF мы определяли `prop` как **тип**, наряду с типами, именуемыми конкретные множества: `prop : *`, `A : *`, `B : *`.
- В  $\lambda$ HOL мы объявляем `prop` **сортом (вселенной)**, утверждение типизации `prop : *` становится аксиомой PTS.
- При этом пропадает необходимость поднимать утверждения  $\varphi : \text{prop}$  на один уровень вверх с помощью `prf : prop  $\rightarrow$  *`.

$\lambda$ HOL	$\mathcal{S}$	<code>prop, *, <math>\square</math></code>
	$\mathcal{A}$	<code>prop : *, * : <math>\square</math></code>
	$\mathcal{R}$	<code>(prop, prop), (*, prop), (*, *)</code>

$\mathcal{S}$	$\text{prop}, *, \square$
$\mathcal{A}$	$\text{prop} : *, * : \square$
$\mathcal{R}$	$(\text{prop}, \text{prop}), (*, \text{prop}), (*, *)$

- Если проигнорировать все, что касается  $\text{prop}$ , видим обычную  $\lambda_{\rightarrow}$ .
- При этом  $*$  — вселенная типов (множеств), ее часто называют  $\text{Type}$  или  $\text{Set}$ .
- Ее используют для определения конструкций:

$$A^*, B^* \vdash A \rightarrow B : *$$
$$A^*, B^* \vdash \lambda x^A y^B. y : A \rightarrow B \rightarrow A$$
$$\text{Nat}^*, 0^{\text{Nat}}, S^{\text{Nat} \rightarrow \text{Nat}} \vdash S(S(S0)) : \text{Nat}$$

S	prop, *, □
λHOL	A prop:*, *:□
R	(prop, prop), (*, prop), (*, *)

- Если, наоборот, проигнорировать все, что касается □, видим вторую копию  $\lambda_{\rightarrow}$ , расширенную до  $\lambda 2$ .
- Правило (prop, prop) позволяет строить и доказывать импликационные формулы

$$\varphi^{\text{prop}}, a^{\varphi} \vdash \text{Pa}^{\varphi}. \varphi : \text{prop}$$

$$\varphi^{\text{prop}} \vdash \varphi \rightarrow \varphi : \text{prop}$$

$$\varphi^{\text{prop}} \vdash \lambda a^{\varphi}. a : \varphi \rightarrow \varphi$$

$\mathcal{S}$	$\text{prop}, *, \square$
$\mathcal{A}$	$\text{prop}:*, *: \square$
$\mathcal{R}$	$(\text{prop}, \text{prop}), (*, \text{prop}), (*, *)$

- Если проигнорировать все, что касается  $\square$ , видим вторую копию  $\lambda_{\rightarrow}$ , **расширенную до  $\lambda_2$** .
- Правило  **$(*, \text{prop})$**  позволяет строить и доказывать универсальные формулы (пишем  $\forall$  вместо  $\Pi$ ):

$$\varphi^{\text{prop}} \vdash \varphi \rightarrow \varphi : \text{prop}$$
$$\vdash \forall \varphi^{\text{prop}}. \varphi \rightarrow \varphi : \text{prop}$$
$$\vdash \lambda \varphi^{\text{prop}} a^{\varphi}. a : \forall \varphi^{\text{prop}}. \varphi \rightarrow \varphi$$



$\mathcal{S}$	<code>prop, *, <math>\square</math></code>
$\mathcal{A}$	<code>prop:*, *:<math>\square</math></code>
$\mathcal{R}$	<code>(prop, prop), (*, prop), (*, *)</code>

- Поскольку сорт `*` населяют не только множества, но и константа `prop`, правило `(*, *)` позволяет помимо типов функций над множествами строить типы предикатов:

$$A^* \vdash A \rightarrow \text{prop} : *$$
$$A^* \vdash A \rightarrow A \rightarrow \text{prop} : *$$

- Более того, выразимы и типы предикатов высших порядков (отсюда **HOL**):

$$A^* \vdash (A \rightarrow A \rightarrow \text{prop}) \rightarrow \text{prop} : *$$

Сконструируем оператор диагонализации предиката:

$$A^*, P^{A \rightarrow A \rightarrow \text{prop}}, \chi^A \vdash P \chi \chi : \text{prop}$$

$$A^*, P^{A \rightarrow A \rightarrow \text{prop}} \vdash \lambda \chi^A. P \chi \chi : A \rightarrow \text{prop}$$

$$A^* \vdash \lambda P^{A \rightarrow A \rightarrow \text{prop}} \chi^A. P \chi \chi : (A \rightarrow A \rightarrow \text{prop}) \rightarrow A \rightarrow \text{prop}$$

- По  $A^*$  абстрагироваться нельзя, для этого нужно правило  $(\square, *)$ .
- Его добавление даст **неконсистентную** систему  $\lambda U^-$  (Coquand, Hurkens).
- Понижающие правила (a la  $\lambda 2$ ), обладают свойством *импредикативности*.
- Много импредикативности вредно для логической консистентности!

$\mathcal{S}$	$\text{prop}, *, \square$
$\mathcal{A}$	$\text{prop} : *, * : \square$
$\mathcal{R}$	$(\text{prop}, \text{prop}), (*, \text{prop}), (*, *), (\square, \text{prop}), (\square, *)$

- Здесь три импредикативных правила, но разрушительно для консистентности только  $(\square, *)$ .
- $\lambda\text{HOL}$  получается без двух последних правил, но можно расширить предпоследним.

$$*: \square$$

$$\text{prop}:*, A:*, B:*, A \rightarrow B:*, \text{prop} \rightarrow \text{prop}:* \\ A \rightarrow \text{prop}:*, (A \rightarrow A \rightarrow \text{prop}) \rightarrow \text{prop}:*$$

$$\varphi:\text{prop}, \psi:\text{prop}, \varphi \rightarrow \psi:\text{prop}, \forall \varphi^{\text{prop}}. \varphi \rightarrow \varphi:\text{prop}, \\ \lambda y^B. y:B \rightarrow B, x:A, \forall x^A. \varphi:\text{prop}, P:A \rightarrow \text{prop}, P x:\text{prop}, \\ \forall x^A. P x:\text{prop}, P x \rightarrow \psi:\text{prop}$$

$$d:\varphi, \lambda b^\varphi. b:\varphi \rightarrow \varphi, a:P x, \lambda x^A. a:\forall x^A. P x$$

Сорта (вселенные) —  $\text{prop}, *, \square$ ; аксиомы —  $\text{prop}:*, *: \square$ .

Правила —  $(*, *)$ ,  $(\text{prop}, \text{prop})$ ,  $(*, \text{prop})$ .

- 1 Логический куб
- 2 Logical Framework
- 3 HOL
- 4  $\lambda$ HOL: выразимость логических связей

Поскольку λНОL допускает конструирование предикатов высших порядков, связки в ней выразимы стандартно

$$\begin{aligned} \vdash \_ \wedge \_ &: \text{prop} \rightarrow \text{prop} \rightarrow \text{prop} \\ \_ \wedge \_ &:= \lambda\varphi^{\text{prop}} \psi^{\text{prop}}. \forall \alpha^{\text{prop}}. (\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vdash (\_, \_) &: \forall \varphi^{\text{prop}} \psi^{\text{prop}}. \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi \wedge \psi \\ (\_, \_) &:= \lambda\varphi^{\text{prop}} \psi^{\text{prop}} a^\varphi b^\psi \alpha^{\text{prop}} f^{\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \alpha}. f a b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vdash \pi_1 &: \forall \varphi^{\text{prop}} \psi^{\text{prop}}. \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi \\ \pi_1 &:= \lambda\varphi^{\text{prop}} \psi^{\text{prop}} p^{\varphi \wedge \psi}. p \varphi (\lambda x^\varphi y^\psi. x) \\ \vdash \pi_2 &: \forall \varphi^{\text{prop}} \psi^{\text{prop}}. \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi \\ \pi_2 &:= \lambda\varphi^{\text{prop}} \psi^{\text{prop}} p^{\varphi \wedge \psi}. p \psi (\lambda x^\varphi y^\psi. y) \end{aligned}$$

Синие аргументы в Агде (vs Хаскелл) маркируются необязательными заключением в фигурные скобки. Они автоматически выводятся компилятором при **определении** и **вызове**.

$$(\_, \_) : \{\forall \varphi^{\text{prop}} \psi^{\text{prop}}.\} \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi \wedge \psi$$

$$(\_, \_) := \lambda a^\varphi b^\psi \alpha^{\text{prop}} f^{\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \alpha}. f a b$$

$$\pi_1 : \{\forall \varphi^{\text{prop}} \psi^{\text{prop}}.\} \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$$

$$\pi_1 := \lambda p^{\varphi \wedge \psi}. p \varphi (\lambda x^\varphi y^\psi. x)$$

$$\pi_2 : \{\forall \varphi^{\text{prop}} \psi^{\text{prop}}.\} \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$$

$$\pi_2 := \lambda p^{\varphi \wedge \psi}. p \psi (\lambda x^\varphi y^\psi. y)$$

Следующие шаги либерализации:

- не дублировать информацию о типах аргументов;
- перенести аргументы в левую часть определения, в стиле комбинаторной логики.

$$\begin{aligned}
 (\_, \_) &: \{\forall \varphi^{\text{PROP}} \psi^{\text{PROP}}.\} \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi \wedge \psi \\
 (a, b) &:= \lambda \alpha^{\text{PROP}} f^{\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \alpha}. f a b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \pi_1 &: \{\forall \varphi^{\text{PROP}} \psi^{\text{PROP}}.\} \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi \\
 \pi_1 p &:= p \varphi (\lambda x^\varphi y^\psi. x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \pi_2 &: \{\forall \varphi^{\text{PROP}} \psi^{\text{PROP}}.\} \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi \\
 \pi_2 p &:= p \psi (\lambda x^\varphi y^\psi. y)
 \end{aligned}$$

Теперь можно забыть о том, что конъюнкция «закодирована», рассматривая эти функции как примитивы.

- Докажите  $\forall \varphi^{\text{PROP}} \psi^{\text{PROP}}. \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi \wedge \varphi$ .
- Определите связку  $\leftrightarrow$  и докажите  $\forall \varphi^{\text{PROP}} \psi^{\text{PROP}}. \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$ .



$$\_ \vee \_ : \text{prop} \rightarrow \text{prop} \rightarrow \text{prop}$$

$$\varphi \vee \psi := \forall \alpha^{\text{prop}}. (\varphi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\psi \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$

$$\text{injL} : \{\forall \varphi^{\text{prop}} \psi^{\text{prop}}.\} \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$$

$$\text{injL } x := \lambda \alpha^{\text{prop}} f^{\varphi \rightarrow \alpha} g^{\psi \rightarrow \alpha}. f x$$

$$\text{injR} : \{\forall \varphi^{\text{prop}} \psi^{\text{prop}}.\} \psi \rightarrow \varphi \vee \psi$$

$$\text{injR } y := \lambda \alpha^{\text{prop}} f^{\varphi \rightarrow \alpha} g^{\psi \rightarrow \alpha}. g y$$

$$\text{match} : \{\forall \varphi, \psi, \rho^{\text{prop}}.\} (\varphi \rightarrow \rho) \rightarrow (\psi \rightarrow \rho) \rightarrow \varphi \vee \psi \rightarrow \rho$$

$$\text{match } f g u := u \rho f g$$

Докажите следующие утверждения:

$$\vee - \text{comm} : \{\forall \varphi^{\text{prop}} \psi^{\text{prop}}.\} \varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \varphi$$

$$\wedge - \text{rdist} - \text{on} - \vee : \{\forall \varphi, \psi, \rho^{\text{prop}}.\} (\varphi \vee \psi) \wedge \rho \leftrightarrow \varphi \wedge \rho \vee \psi \wedge \rho$$

$$\perp : \text{prop}$$
$$\perp := \forall \alpha^{\text{prop}}. \alpha$$

$$\top : \text{prop}$$
$$\top := \forall \alpha^{\text{prop}}. \alpha \rightarrow \alpha$$

$$\neg \_ : \text{prop} \rightarrow \text{prop}$$
$$\neg \varphi := \varphi \rightarrow \perp$$

Докажите законы де Моргана

$$\text{deMorgan}_1 : \{\forall \varphi^{\text{prop}} \psi^{\text{prop}}.\} \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$$
$$\text{deMorgan}_{21} : \{\forall \varphi^{\text{prop}} \psi^{\text{prop}}.\} \neg\varphi \vee \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$$

В обратную сторону конструктивно недоказуем.

Фиксируем контекст  $A : *$  (обычно это задается в сигнатуре логики).

$$\begin{aligned} \exists & : (A \rightarrow \text{prop}) \rightarrow \text{prop} \\ \exists & := \lambda P^{A \rightarrow \text{prop}}. \forall \alpha^{\text{prop}}. (\forall x^A. P x \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \_, \_ \rangle & : \{\forall P^{A \rightarrow \text{prop}}.\} \forall x^A. P x \rightarrow \exists (\lambda x^A. P x) \\ \langle \_, \_ \rangle & := \lambda x^A v^{P x}. \lambda \alpha^{\text{prop}} f^{\forall x^A. P x \rightarrow \alpha}. f x v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exists - \text{elim} & : \{\forall P^{A \rightarrow \text{prop}} \varphi^{\text{prop}}.\} \exists (\lambda x^A. P x) \rightarrow (\forall x^A. P x \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi \\ \exists - \text{elim} & := \lambda u^{\exists P} v^{\forall x^A. P x \rightarrow \varphi}. u \varphi v \end{aligned}$$

Альтернативные способы обозначения  $\exists(A, P)$ ,  $\exists x^A. P x$ .  
(Импредикативные системы с *сильной* суммой быстро становятся неконсистентными.)

$$\begin{aligned} A : * \vdash \_ \equiv_A \_ : A \rightarrow A \rightarrow \text{prop} \\ x \equiv_A y := \forall P^{A \rightarrow \text{prop}}. P x \rightarrow P y \end{aligned}$$

Докажите следующие утверждения:

$$\equiv_A\text{-refl} : \forall x^A. x \equiv_A x$$

$$\equiv_A\text{-trans} : \forall x^A y^A z^A. x \equiv_A y \rightarrow y \equiv_A z \rightarrow x \equiv_A z$$

$$\equiv_A\text{-symm} : \forall x^A y^A. x \equiv_A y \rightarrow y \equiv_A x$$

Последнее требует некоторого ухищрения.