

Линейные типы

Дмитрий Халанский

13 мая 2021 г.

Просто типизированное лямбда-исчисление

$$\frac{(x, \tau) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \tau} \text{ Var}$$
$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M N : \tau} \text{ App}$$
$$\frac{\{(x, \sigma)\} \cup \Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x. M : \sigma \rightarrow \tau} \text{ Lam}$$

Контекст — это множество. Нужна ли нам настолько мощная конструкция?

Просто типизированное лямбда-исчисление на списках

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau}{(x, \sigma), \Gamma \vdash M : \tau} \text{ Weakening}$$

$$\frac{\Gamma, (y, \rho), (x, \sigma), \Theta \vdash M : \tau}{\Gamma, (x, \sigma), (y, \rho), \Theta \vdash M : \tau} \text{ Permutation}$$

$$\frac{}{(x, \tau) \vdash x : \tau} \text{ Var}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M N : \tau} \text{ App}$$

$$\frac{(x, \sigma), \Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x. M : \sigma \rightarrow \tau} \text{ Lam}$$

Суть weakening: даже если переменная есть в контексте, её можно не использовать.

Неиспользованные переменные как ошибка: первая попытка

Выкинем weakening.

$$\frac{\Gamma, (y, \rho), (x, \sigma), \Theta \vdash M : \tau}{\Gamma, (x, \sigma), (y, \rho), \Theta \vdash M : \tau} \text{Permutation}$$

$$\frac{}{(x, \tau) \vdash x : \tau} \text{Var}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M N : \tau} \text{App}$$

$$\frac{(x, \sigma), \Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x. M : \sigma \rightarrow \tau} \text{Lam}$$

Нельзя протипизировать почти ничего, например, $\lambda f x. f x$. Почему?

Неиспользованные переменные как ошибка: вторая попытка

Разобьём контекст внутри App.

$$\frac{\Gamma, (y, \rho), (x, \sigma), \Theta \vdash M : \tau}{\Gamma, (x, \sigma), (y, \rho), \Theta \vdash M : \tau} \text{Permutation}$$

$$\frac{}{(x, \tau) \vdash x : \tau} \text{Var}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Theta \vdash N : \sigma}{\Gamma, \Theta \vdash M N : \tau} \text{App}$$

$$\frac{(x, \sigma), \Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x. M : \sigma \rightarrow \tau} \text{Lam}$$

Нельзя протипизировать $\lambda f g x. f x (g x)$. Почему?

Неиспользованные переменные как ошибка

Добавим contraction.

$$\frac{\Gamma, (y, \rho), (x, \sigma), \Theta \vdash M : \tau}{\Gamma, (x, \sigma), (y, \rho), \Theta \vdash M : \tau} \text{Permutation}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash M : \tau} \text{Contraction}$$

$$\frac{}{(x, \tau) \vdash x : \tau} \text{Var}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Theta \vdash N : \sigma}{\Gamma, \Theta \vdash M N : \tau} \text{App}$$

$$\frac{(x, \sigma), \Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x. M : \sigma \rightarrow \tau} \text{Lam}$$

Просто типизированное лямбда-исчисление в новом свете

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau}{(x, \sigma), \Gamma \vdash M : \tau} \text{ Weakening}$$

$$\frac{\Gamma, (y, \rho), (x, \sigma), \Theta \vdash M : \tau}{\Gamma, (x, \sigma), (y, \rho), \Theta \vdash M : \tau} \text{ Permutation}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash M : \tau} \text{ Contraction}$$

$$\frac{}{(x, \tau) \vdash x : \tau} \text{ Var}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Theta \vdash N : \sigma}{\Gamma, \Theta \vdash M N : \tau} \text{ App}$$

$$\frac{(x, \sigma), \Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x. M : \sigma \rightarrow \tau} \text{ Lam}$$

Просто типизированное лямбда-исчисление в новом свете

$$\frac{}{(x, \tau) \vdash x : \tau} \text{Var}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau}{(x, \sigma), \Gamma \vdash M : \tau} \text{Weakening}$$

$$\frac{\Gamma, (y, \rho), (x, \sigma), \Theta \vdash M : \tau}{\Gamma, (x, \sigma), (y, \rho), \Theta \vdash M : \tau} \text{Permutation}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash M : \tau} \text{Contraction}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Theta \vdash N : \sigma}{\Gamma, \Theta \vdash M N : \tau} \text{App}$$

$$\frac{(x, \sigma), \Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x. M : \sigma \rightarrow \tau} \text{Lam}$$

Субструктурные системы типов

[https://en.wikipedia.org/wiki/Substructural_type_system#
Different_substructural_type_systems](https://en.wikipedia.org/wiki/Substructural_type_system#Different_substructural_type_systems)