



Теория категорий

Элементарные топосы

Валерий Исаев

23 апреля 2019 г.

Классификатор подобъектов

Определение топосов

Категория предпучков

Эффективный топос

Синтаксическая категория

Свойства топосов



Интерпретация вселенных

- ▶ Нам осталось научиться интерпретировать вселенные.
- ▶ Произвольные вселенные нам не пригодятся; мы будем интерпретировать только вселенную утверждений \mathbf{Prop} .
- ▶ Этот тип характеризуется тем, что функции $A \rightarrow \mathbf{Prop}$ соответствуют подтипам A .



Классификатор подобъектов в **Set**

- ▶ В **Set** существует биекция между подмножествами некоторого множества A и предикатами $A \rightarrow 2$.
- ▶ Если $2 = \{\top, \perp\}$ и $f : A \rightarrow 2$, то соответствующее подмножество A можно определить как $f^{-1}(\top)$.
- ▶ Эту конструкцию можно переформулировать категориально. Пусть $\text{true} : 1 \rightarrow 2$ – функция, выбирающая элемент \top . Тогда любому морфизму $f : A \rightarrow 2$ мы можем сопоставить подобъект A – пулбэк true вдоль f .
- ▶ В **Set** эта конструкция взаимно однозначна. В произвольной категории это может быть не верно.



Определение классификатора подобъектов

Definition

Пусть в \mathbf{C} существует терминальный объект 1 . Тогда объект Ω вместе с морфизмом $\text{true} : 1 \rightarrow \Omega$ называется *классификатором подобъектов*, если для любого мономорфизма $f : A' \hookrightarrow A$ существует уникальный морфизм $\chi_f : A \rightarrow \Omega$, такой что следующий квадрат является пулбэком:

$$\begin{array}{ccc}
 A' & \longrightarrow & 1 \\
 \downarrow f & & \downarrow \text{true} \\
 A & \xrightarrow{\chi_f} & \Omega
 \end{array}$$

Таким образом, существует биекция между подобъектами A и морфизмами $A \rightarrow \Omega$.



Правила вывода для Prop

$$\frac{\Gamma \vdash A : \text{Prop}}{\Gamma \vdash \text{El}(A)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \text{Prop}}{\Gamma, x : \text{El}(A), y : \text{El}(A) \vdash x = y}$$

$$\frac{\begin{array}{l} \Gamma \vdash A : \text{Prop} \quad \Gamma, x : \text{El}(A) \vdash b : \text{El}(B) \\ \Gamma \vdash B : \text{Prop} \quad \Gamma, y : \text{El}(B) \vdash a : \text{El}(A) \end{array}}{\Gamma \vdash \text{iso}(x. b)(y. a) : A = B}$$



Интерпретация Prop

- ▶ Определим $\llbracket \text{Prop} \rrbracket$ как Ω .
- ▶ Если $\llbracket A \rrbracket : \llbracket \Gamma \rrbracket \rightarrow \llbracket \text{Prop} \rrbracket$, то $\llbracket \text{El}(A) \rrbracket = \llbracket A \rrbracket^*(\text{true})$.
- ▶ Так как у нас есть биекция между морфизмами $X \rightarrow \Omega$ и подобъектами X , то имея $\llbracket A \rrbracket, \llbracket B \rrbracket : \llbracket \Gamma \rrbracket \rightarrow \Omega$ и другие посылки iso, мы получаем, что $\llbracket A \rrbracket^*(\text{true}) = \llbracket B \rrbracket^*(\text{true})$ как подобъекты $\llbracket \Gamma \rrbracket$. Следовательно, $\llbracket A \rrbracket = \llbracket B \rrbracket$.

Классификатор подобъектов

Определение топосов

Категория предпучков

Эффективный топос

Синтаксическая категория

Свойства топосов



Определение топосов

Definition

(Элементарный) топос – это категория, в которой существуют конечные пределы, классификатор подобъектов Ω и для любого A экспонента Ω^A .

Примеры топосов:

- ▶ Категории предпучков.
- ▶ Эффективный топос.
- ▶ Синтаксическая категория подходящего языка.



Классификатор подобъектов в категории предпучков

Proposition

В любой категории предпучков существует классификатор подобъектов.

Доказательство.

У нас должна быть биекция между множеством подобъектов объекта A и $\text{Hom}(A, \Omega)$. Но по лемме Йонеды должно быть верно $\Omega_a = \text{Hom}(\mathbf{y}a, \Omega)$. Следовательно, мы можем определить Ω_a как множество подобъектов $\mathbf{y}a$. На морфизмах он будет действовать следующим образом:

$\Omega(f : a \rightarrow b)(x \hookrightarrow \mathbf{y}b) = \mathbf{y}f^{-1}(x) \hookrightarrow \mathbf{y}a$. Морфизм $\text{true} : 1 \rightarrow \Omega$ определяется как морфизм, выбирающий на каждом a максимальный подобъект $\mathbf{y}a$.



Классификатор подобъектов в категории предпучков

Доказательство.

По определению Ω для любого подобъекта $f : x \hookrightarrow \mathbf{y}a$ существует уникальный морфизм $\chi_f : \mathbf{y}a \rightarrow \Omega$, такой что следующий квадрат является пулбэком:

$$\begin{array}{ccc}
 x & \longrightarrow & 1 \\
 f \downarrow & \lrcorner & \downarrow \text{true} \\
 \mathbf{y}a & \xrightarrow{\chi_f} & \Omega
 \end{array}$$



Классификатор подобъектов в категории предпучков

Доказательство.

Пусть теперь у нас есть произвольный пулбэк как на диаграмме справа:

$$\begin{array}{ccccc}
 b^{-1}(A) & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 1 \\
 \downarrow b^{-1}(f) & \lrcorner & \downarrow f & \lrcorner & \downarrow \text{true} \\
 \mathbf{y}a & \xrightarrow{b} & B & \xrightarrow{g} & \Omega
 \end{array}$$

Тогда для любого $b : \mathbf{y}a \rightarrow B$ должно быть верно, что $g \circ b = \chi_{b^{-1}(f)}$. Таким образом, значение морфизма g однозначно определено на любом элементе b морфизмом f , и, следовательно, он должен быть уникален. Более того, характеристика, описанная выше, также служит его определением, то есть он существует.



Частичные комбинаторные алгебры

- ▶ *Частичная комбинаторная алгебра* – это множество A вместе с частичной функцией $\cdot : A \times A \rightarrow A$, такое что существуют константы $k, s \in A$, удовлетворяющие следующим равенствам:

$$k \cdot x \cdot y = x$$

$$s \cdot x \cdot y \cdot z = x \cdot z \cdot (y \cdot z)$$

- ▶ Частичная комбинаторная алгебра – это алгебраическая модель нетипизированного лямбда исчисления.
- ▶ Пример: A – множество нетипизированных лямбда термов по отношению $\beta\eta$ -эквивалентности, \cdot – аппликация.
- ▶ Пример: $A = \mathbb{N}$, $n \cdot m = \varphi(n)(m)$, где φ – некоторая нумерация вычислимых функций.



Сборки

- ▶ A -сборка – это множество X вместе с отношением \Vdash на $A \times X$, таким что для любого $x \in X$ существует $a \in A$, такой что $a \Vdash x$, и, если $a \Vdash x$ и $a \Vdash y$, то $x = y$.
- ▶ Морфизм A -сборок X и Y – это функция $f : X \rightarrow Y$, такая что существует $r \in A$, реализующий f , то есть если $a \Vdash x$, то $r \cdot a \Vdash f(x)$.
- ▶ Категория A -сборок не является топосом (но является квазитопосом).
- ▶ Эту категорию можно расширить, получив топос.
- ▶ Такой топос, когда A – второй пример с предыдущего слайда, называется *эффективным топосом*.



Язык

- ▶ Если мы добавим в язык с зависимыми типами достаточное количество конструкций, то его синтаксическая категория (почти) будет топосом.
- ▶ Конкретно, нам нужно добавить вселенную утверждений *Prop* и правило, которое говорит, что она содержит все утверждения.



Замкнутость вселенной

- ▶ Обычно еще добавляют правила, которые говорят, что вселенная замкнута относительно различных конструкций: конъюнкций, дизъюнкций, и так далее.
- ▶ Если мы добавляем правило, которое говорит, что она замкнута относительно всех утверждений, то это не нужно делать.
- ▶ В частности, это означает, что в любом топосе можно проинтерпретировать такие правила.

План лекции

Классификатор подобъектов

Определение топосов

Категория предпучков

Эффективный топос

Синтаксическая категория

Свойства топосов



Синглтоны

- ▶ Для любого A существует морфизм $\{-\}_A : A \rightarrow \Omega^A$, о котором можно думать так, что каждому a из A он сопоставляет предикат $A \rightarrow \Omega$, который верен только на a . Другими словами, если думать о предикате как о подмножестве, то он возвращает синглтон – подмножество, состоящее из одного элемента.
- ▶ Этот морфизм можно определить как каррирование $\chi_\Delta : A \times A \rightarrow \Omega$, где $\Delta : A \hookrightarrow A \times A$ – диагональ.
- ▶ Таким образом, χ_Δ – это просто предикат равенства.



Свойства синглтонов

Proposition

Морфизм $\{-\}_A : A \rightarrow \Omega^A$ является мономорфизмом.

Доказательство.

Действительно, во внутреннем языке $\{-\}_A$ можно описать как $\lambda y. \chi(y = x)$. Пусть $x, x' : A$ – такие, что $(\lambda y. \chi(y = x)) = (\lambda y. \chi(y = x'))$. Подставляя $y = x$, получаем $\chi(x = x) = \chi(x = x')$. Но равенство характеристических функция означает равенство подобъектов, то есть верно утверждение $x = x \leftrightarrow x = x'$. Левая формула верна по рефлексивности, следовательно верна правая, что и требовалось доказать. □



Декартова замкнутость

Proposition

Любой топос является декартово замкнутым.

Доказательство.

Мы определим экспоненту B^A так же как и в **Set**, то есть через графики функций. Конкретно, B^A будет подобъектом $\Omega^{A \times B}$, состоящим из функциональных предикатов.

$$B^A = \{f : A \times B \rightarrow \Omega \mid (\lambda a : A. \chi(\exists!(b : B) \chi^{-1}(f(a, b)))) = true_A\}$$

Заметим, что предикат $\exists!$ является выразимым:

$$\exists!(b : B) \varphi(a, b) = \chi^{-1}(\lambda a : A. \chi(\{-\}_B)(\lambda b : B. \chi(\varphi(a, b))))$$



Фундаментальная теорема теории топосов

Proposition

Если A – некоторый объект топоса \mathbf{C} , то \mathbf{C}/A также является топосом.

Доказательство.

Очевидно в \mathbf{C}/A существуют все конечные пределы.
Классификатор подобъектов определяется просто как $\Omega_A = A^*(\Omega)$. Подобъекты некоторого $(B, \rho_B) \in \mathbf{C}/A$ – это просто подобъекты B в \mathbf{C} . С другой стороны у нас есть биекция $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, \Omega) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{C}/A}((B, \rho_B), \Omega_A)$. Откуда следует, что Ω_A является классификатором подобъектов в \mathbf{C}/A .



Фундаментальная теорема теории топосов

Доказательство.

Теперь мы хотим показать, что для любого $(B, p_B) \in \mathbf{C}/A$ существует $\Omega_A^{(B, p_B)} \in \mathbf{C}/A$. Для такого объекта должны выполняться следующие равенства: $\text{Hom}_{\mathbf{C}/A}(X, \Omega_A^{(B, p_B)}) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{C}/A}(X \times_A (B, p_B), \Omega_A) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X \times_A B, \Omega)$. Но морфизмы $X \times_A B \rightarrow \Omega$ – это просто подобъекты $X \times_A B$. Но этот объект сам является подобъектом $X \times B$. Таким образом, это множество состоит из тех морфизмов $p : X \times B \rightarrow \Omega$, которые задают подобъект, содержащий $X \times_A B$.



Фундаментальная теорема теории топосов

Доказательство.

Пусть $q : X \times B \rightarrow \Omega$, $q = \chi_{X \times_A B}$. Тогда это множество можно описать как $\{p : X \times B \rightarrow \Omega \mid (\lambda t : X \times B. p(t) \wedge q(t)) = p\}$.

Или как $\{p' : X \rightarrow \Omega^B \mid (\lambda x : X. \lambda b : B. p'(x)(b) \wedge q(x, b)) = p'\}$.

Или как множество $p' : X \rightarrow \Omega^B$, таких что

$\langle p', p_X \rangle : X \rightarrow \Omega^B \times A$ уравнивает стрелки $f, g : \Omega^B \times A \rightarrow \Omega^B$, где $f = \pi_1$ и $g = (\lambda (s, a) b. s(b) \wedge p_B(b) = a)$. И, следовательно,

как соответствующее подмножество множества морфизмов $\text{Hom}_{\mathcal{C}/A}(X, A^*(\Omega^B))$. Следовательно, мы можем определить

$\Omega_A^{(B, p_B)}$ как уравнитель f и g . □



Регулярность топосов

- ▶ Любой топос – регулярная категория.
- ▶ Действительно, мы можем определить пропозициональное обрезание через Ω :

$$\|A\| = \prod_{X:\Omega} (A \rightarrow X) \rightarrow X$$

- ▶ Квантор существования определяется через $\| - \|$ и Σ обычным образом.
- ▶ Стабильность относительно пулбэков следует из стабильности Ω , Π и Σ .



Операции над подобъектами

- ▶ Используя Ω , легко сконструировать наименьший подобъект и объединение подобъектов.
- ▶ Сделаем это сначала для терминального объекта.
- ▶ Пусть A и B – подобъекты терминального объекта, тогда определим их объединение как

$$A \cup B = \prod_{X:\Omega} (A \rightarrow X) \rightarrow (B \rightarrow X) \rightarrow X.$$

- ▶ Легко сконструировать стрелку $A \rightarrow A \cup B$, конкретно, $\lambda a X f g. f a$. Аналогично определяется стрелка $B \rightarrow A \cup B$.
- ▶ Теперь, если C – подобъект терминального объекта и $f : A \rightarrow C$, $g : B \rightarrow C$, то существует стрелка $A \cup B \rightarrow C$, конкретно, $\lambda d. d C f g$.



Когерентность топосов

- ▶ Начальный подобъект конструируется аналогичным образом: $0 = \prod_{X:\Omega} X$.
- ▶ Аналогично для любого подобъекта C существует стрелка $0 \rightarrow C$, конкретно $\lambda d.d C$.
- ▶ Если X – произвольный объект, то можно определить эти операции над подобъектами X .
- ▶ Действительно, так как \mathbf{C}/X является топосом, то в нем эти операции определены для терминального объекта. Но терминальный объект в нем – это X .
- ▶ Эти операции стабильны относительно пулбэков по аналогичным соображениям.



Конечные копределы

- ▶ Следовательно, любой топос – когерентная категория, а значит в нем существует начальный объект.
- ▶ Осталось доказать существование пушаутов.
- ▶ Пусть $f : A \rightarrow B$ и $g : A \rightarrow C$.
- ▶ Тогда мы можем определить $B \amalg_A C$ как подобъект $\Omega^B \times \Omega^C$, состоящий из (p, q) , удовлетворяющих

$$(\exists (b : B)(p = \{b\}_B) \wedge q = \lambda c. \chi(\exists (a : A)(g a = c))) \vee (\dots)\}.$$