

Мощность множества.

1. Установите взаимнооднозначное соответствие между кругом без границы и кругом с границей.
2. Верно ли, что множество прямых на плоскости имеет мощность континуум?
3. Докажите, что множество бесконечных последовательностей действительных чисел равномощно \mathbf{R} .
4. Укажите взаимно однозначное соответствие между множеством $[0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, 5] \cup [6, 7] \cup \dots$ и отрезком $[0, 1]$.
5. Докажите, что существуют числа не являющиеся целыми алгебраическими числами. Число назовем целым алгебраическим, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами.
6. Верно ли, что множество функций $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$ имеет мощность континуум?
7. Докажите, что отношений эквивалентности на множестве натуральных чисел континуум.
8. Верно ли, что отношений эквивалентности на множестве натуральных чисел, в которых каждый класс эквивалентности конечен, тоже континуум?
9. Докажите, что если квадрат разбит на два множества, то хотя бы одно из них равномощно квадрату.
10. Существует ли такое семейство подмножеств натуральных чисел, что (а) среди любых двух множеств в этом семействе одно вложено в другое; (б) мощность семейства — континуум?
11. Покажите, что множества точек разрыва монотонной функции действительного аргумента счетно или конечно.
12. Какова мощность множества всех непрерывных функций с действительными аргументами и значениями? Существенна ли здесь непрерывность?
13. Докажите, что функция $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, которая задана правилами $f(2k) = 0$, $f(2k+1) = 1$, не представляется в виде суммы двух биекций.