

## Числа Стирлинга второго рода, числа Белла и повторение.

1.1. Докажите, что для всех  $n > 2$  числа Белла  $B(n) < n!$ .

1.2. Обозначим через  $F(n)$  количество разбиений  $n$ -множества без блоков единичной длины. Докажите, что

$$B(n) = F(n) + F(n + 1).$$

1.3. Найдите рекуррентную формулу для вычисления чисел  $F(n)$ , введенных в предыдущем упражнении.

1.4. Докажите, что количество разбиений  $n$ -элементного множества, при котором ни в одном блоке не содержится пара последовательно идущих чисел, описывается числом Белла  $B(n - 1)$ .

1.5. Докажите, что в любой выборке из 52 положительных целых чисел найдутся хотя бы два, у которых либо их сумма, либо их разность делится на 100.

1.6. Докажите, что в произвольном  $(n + 2)$ -м подмножестве множества  $\{1, 2, \dots, 3n\}$  чисел обязательно найдутся хотя бы два числа, разность которых строго больше  $n$  и строго меньше  $2n$ .

1.7. Дано число  $5300 \dots 0035$  (100 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 495. Сколькими способами это можно сделать?

1.8. Два натуральных числа назовем близкими взаимно простыми, если они взаимно простые и различаются не больше чем на три. Найдите количество пар близких взаимно простых чисел, расположенных между 50 и 150 включительно.

1.9. Сколько существует шестизначных чисел, произведение цифр которых делится на 63?

1.10. Квадрат разделён на 16 одинаковых квадратов. Сколькими способами можно раскрасить эти квадраты в белый, чёрный, красный и синий цвета так, чтобы в каждом горизонтальном и каждом вертикальном ряду были все четыре цвета?

1.11. На плоскости нарисован круг и три семейства прямых: в одном —  $a$  параллельных между собой прямых, в другом —  $b$  параллельных между собой прямых, в третьем —  $c$  параллельных между собой прямых. На какое наибольшее число частей прямые могут разбить круг? Как изменится ответ в случае, если три семейства разбивают на части не круг, а плоскость?

1.12. Докажите, что  $(1 + x)^n + (1 - x)^n \leq 2^n$  при  $n \geq 1$  и  $|x| \leq 1$ .

1.13. Найдите коэффициент при  $x^7 y^{11} z^3$  в многочлене  $(x + y + z)^2$ .

1.14. Пусть  $B_k(n)$  есть количество разбиений, таких, что если числа  $i$  и  $j$  входят в один и тот же блок, то  $|i - j| > k$ . Докажите, что  $B_k(n) = B(n - k)$  для всех  $n \geq k$ .