

## 9 сентября 2020. Принцип Дирихле.

*Если  $k$  объектов распределить по  $n$  группам и при этом  $k > n$ , то хотя бы в одну группу попадут как минимум два объекта.*

### Задачи для совместного обсуждения

- На доске написано 2020 натуральных чисел. Докажите, что найдутся два таких числа, что их разность делится на 2020.
- В группе 35 студентов. Был проведен опрос, сколько у кого знакомых в группе, и все студенты дали различные ответы. Докажите, что кто-то слукавил.
- В квадрате  $3 \times 3$  см отмечено десять точек. Докажите, что найдутся две точки на расстоянии менее 1,5 см.
- Если по  $n$  группам распределить  $mn + 1$  или больше объектов, то найдётся группа, в которую попало как минимум  $m$  объектов.
- Если по  $n$  группам распределить  $mn - 1$  или меньше объектов, то найдётся группа, в которую попало менее, чем  $m$  объектов.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Десять студентов за одно занятие решили 35 задач. Известно, что среди студентов есть те, кто решил ровно одну задачу, ровно две задачи и ровно три задачи. Докажите, что среди десяти студентов найдется хотя бы один студент, решивший как минимум пять задач.
2. Сколько чисел нужно выбрать из множества  $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ , чтобы среди них гарантированно нашлась хотя бы одна пара чисел, сумма которых была бы равна  $2n + 1$ ?
3. В прямоугольнике со сторонами  $15 \times 24$  сантиметров отмечена 31 точка. Докажите, что найдутся две точки, расстояние между которыми меньше или равно пяти сантиметрам.
4. Узлы бесконечной клетчатой бумаги покрашены в два цвета. Доказать, что существуют две горизонтальные и две вертикальные прямые, на пересечениях которых лежат точки, покрашенные в один и тот же цвет.
5. Докажите, что в последовательности чисел  $7, 77, 777, 7777, \dots$  один из первых 2019 членов делится на 2019.
6. Множество состоит из первых  $2n$  натуральных чисел. В нём выбрали подмножество из  $(n + 1)$  элемента. Докажите, что в этом подмножестве найдутся два числа, одно из которых делится на другое.
7. Докажите, что любая последовательность из  $nm + 1$  целых чисел содержит либо убывающую подпоследовательность, состоящую не менее, чем из  $(n + 1)$ -го числа, либо возрастающую подпоследовательность, состоящую из не менее чем  $(m + 1)$ -го числа.