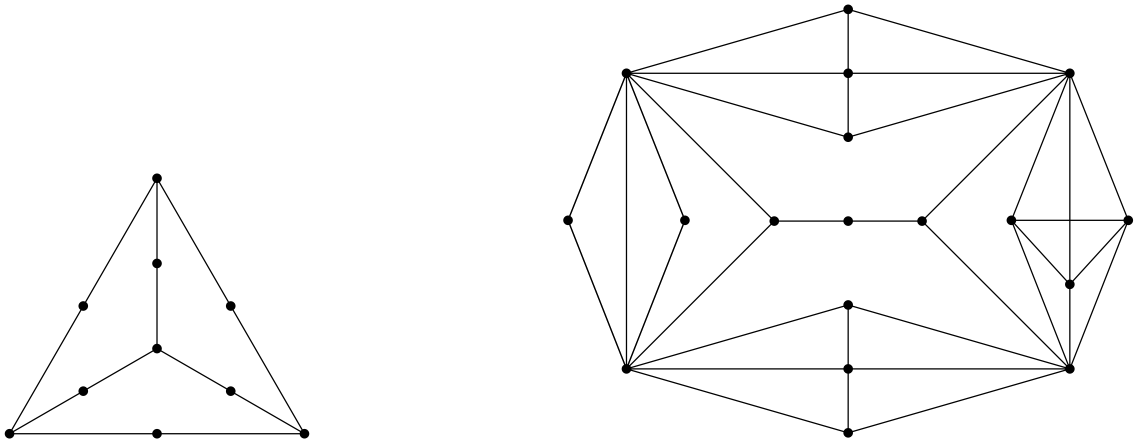
7 Совершенные паросочетания



(a) Граф G_1 (b) Граф G_2

Рис. 1

7.1. Доказать с помощью теоремы Татта, что в изображенных на рис.1 графах G_1, G_2 совершенное паросочетание отсутствует.

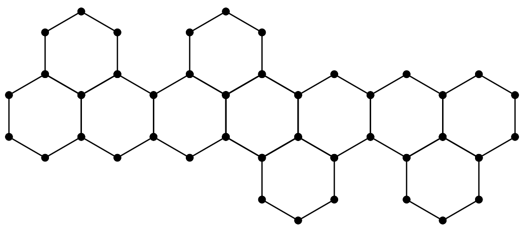


Рис. 2: Граф G

7.2. Доказать с помощью теоремы Татта, что в изображенном на рис.2 графе G совершенное паросочетание отсутствует.

7.3. Доказать, что k-куб Q_k имеет совершенное паросочетание для любого $k \geqslant 1$.

7.4. Показать, что в кубе Q_k найдется по меньшей мере $2^{2^{k-2}}$ совершенных паросочетаний для всех $k \geqslant 2$.

7.5. Подсчитать количество совершенных паросочетаний в кубе Q_3.

7.6. Пусть G — граф, в котором все вершины имеют нечетную степень. Предположим, что в графе G существует совершенное паросочетание M. Доказать, что такое паросочетание обязано включать любой мост в графе G.

7.7. Пусть G есть связный $2k$-регулярный граф с чётным числом рёбер. Доказать, что G имеет k-фактор.

7.8. Докажите, что дерево T содержит совершенное паросочетание тогда и только тогда когда $o(T - \backslash v) = 1$ для любой вершины $v \in V(T)$.

7.9. Для любого $k > 1$ постройте k-регулярный простой граф G не содержащий 1-фактор (совершенное паросочетание)

7.10. Докажите, что если граф допускает декомпозицию на 1-факторы, то он не содержит точек сочленения. Постройте пример 3-регуралярного просто графа содержащего и совершенное парочосетание и точку сочленения.

7.11. Докажите, что размер максимального паросочетания в любом графе не менее $\frac{n}{1+\Delta G}$.

7.12. Для каждого k постройте граф G такой, что $\alpha'(G) = k$ и $\beta(G) = 2k$.

7.13. Пусть граф G содержит четное число вершин n и существует такое множество вершин S размера k, что $o(G \setminus S) > k$. Докажите, что G содержит не более $\binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n-2k-1}{2}$ ребер. Покажите, что улучшить эту оценку нельзя.

7.14. Подсчитать количество совершенных паросочетаний в графе Петерсена.

7.15. Пусть G есть k-регулярный граф, построенный на четном количестве вершин, остающийся связным при удалении любых ребер в количестве $k-2$ штук. Доказать, что в таком графе существует совершенное паросочетание (теорема Плесника).

7.16. Доказать, что в условиях теоремы Плесника для любого ребра $e \in E(G)$ существует совершенное паросочетание графа G, содержащее e.

7.17. Обозначим через G_n граф, построенный на $2n$ вершинах $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$, и имеющий ребра вида $\{x_i, x_{i+1}\}$, $\{y_i, y_{i+1}\}$, а также $\{x_i, y_i\}$. Подсчитать количество совершенных паросочетаний в таком графе.

7.18. Доказать, что любой кубический граф, имеющий не более двух мостов, допускает декомпозицию на пути длины 3.