Математическая логика и теория вычислимости Лекция 7. Общезначимые формулы логики предикатов

Денис Николаевич Москвин

ИТМО, корпоративная магистратура JetBrains
Разработка ПО / Software Engineering

24.03.2021

План лекции

1. Общезначимые формулы
2. Подстановки термов
3. Общезначимые формулы с кванторами
4. Предваренная нормальная форма

План лекции

Классификация формул

- Пусть фиксирована некоторая сигнатура σ.
- Формула φ называется *общезначимой*, если она является истинной в любой интерпретации сигнатуры σ на любой оценке.
- Формула φ называется *необщезначимой*, если она не является общезначимой.
- Формула φ называется *невыполнимой*, если она является ложной в любой интерпретации сигнатуры σ на любой оценке.
- Формула φ называется *выполнимой*, если она не является невыполнимой.
- **Утверждение.** Формула φ общезначима тогда и только тогда, когда $\neg\varphi$ невыполнима.

Выполнимость: пример

- Рассмотрим формулу

$$\forall x \neg P(x, x) \wedge \forall x \forall y \forall z\, (P(x, y) \wedge P(y, z) \to P(x, z)) \wedge \forall x \exists y P(x, y)$$

- Выполнима ли она?

- Рассмотрим формулу

$$\forall x \neg P(x,x) \wedge \forall x \forall y \forall z \,(P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)) \wedge \forall x \exists y P(x,y)$$

- Выполнима ли она? Да!
  Носитель $D = \mathbb{N}$, интерпретация $P(x,y) = x < y$.
- Выполнима ли она в какой-либо интерпретации с конечным носителем?

Выполнимость: пример

- Рассмотрим формулу

$$\forall x \neg P(x,x) \wedge \forall x \forall y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)) \wedge \forall x \exists y P(x,y)$$

- Выполнима ли она? Да!
  Носитель $D = \mathbb{N}$, интерпретация $P(x,y) = x < y$.
- Выполнима ли она в какой-либо интерпретации с конечным носителем? Нет!
  Истинность формулы влечет существование неограниченной последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, все элементы которой различны и $P(a_i, a_j)$ при $i < j$.
- К счастью, счетных носителей достаточно: если есть хоть какая-то интерпретация, обеспечивающая выполнимость, то обязательно найдется счетная с таким свойством.

Выполнимость и унарные предикаты

- Рассмотрим сигнатуру с двумя унарными предикатами P и Q.
- Пусть формула φ выполнима в этой сигнатуре.
- Покажите, что есть четырехэлементная интерпретация, в которой она выполнима.

Замыкания формул

- *Универсальным замыканием* формулы называется приписывание к ней слева кванторов всеобщности, связывающих все ее свободные переменные.
- **Утверждение.** Общезначимость формулы φ равносильна общезначимости ее универсального замыкания.
- *Экзистенциальным замыканием* формулы называется приписывание к ней слева кванторов существования, связывающих все ее свободные переменные.
- **Утверждение.** Выполнимость формулы φ равносильна выполнимости ее экзистенциального замыкания.

Общезначимые формулы

- **Теорема.** Если A — тавтология логики высказываний, содержащая пропозициональные переменные $p_1, \dots, p_n$, а $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — произвольные формулы сигнатуры σ, то подстановка этих формул вместо переменных ($p_i := \varphi_i$, $i = 1, \dots, n$) даст общезначимую формулу.
- **Доказательство.** В любой интерпретации на любой оценке формулы примут определенные булевы значения. Независимо от этих значений итоговый результат будет T, поскольку определяется таблицами истинности пропозициональных связок. ■

Эквивалентные формулы

- Две формулы φ и ψ называют *эквивалентными*, если в любой интерпретации сигнатуры σ на любой оценке, на которой истинна одна из них, истинна и вторая, и наоборот.
- **Утверждение.** Эквивалентность формул φ и ψ равносильна общезначимости формулы $\varphi \leftrightarrow \psi$.
- **Доказательство.** Следует из определения связки $\leftrightarrow$. ■
- **Теорема (об эквивалентной замене).** Пусть ψ — подформула формулы φ, и имеется ψ', такая что $\psi' \leftrightarrow \psi$. Пусть φ' — результат замены в φ некоторого вхождения ψ на ψ'. Тогда $\varphi' \leftrightarrow \varphi$.
- **Доказательство.** Берем произвольную интерпретацию и оценку; указаная замена не изменит истинностного значения подформул. ■
- Эквивыполнимость не влечет эквивалентность: неверно $x > 2 \leftrightarrow \exists x(x > 2)$.

План лекции

Проблема с подстановкой термов

- Подстановка формулы логики предикатов вместо пропозициональной переменной в пропозициональную тавтологию не порождает проблем.
- Это не так для подстановки терма вместо индивидной переменной в логике высказываний:

$$A(x) \vee \exists x B(x, x)$$

$$x := f(y)$$

- Подстановка формулы логики предикатов вместо пропозициональной переменной в пропозициональную тавтологию не порождает проблем.
- Это не так для подстановки терма вместо индивидной переменной в логике высказываний:

$$A(x) \vee \exists x B(x, x)$$

$$x := f(y)$$

- Очевидно, что подстановку следует осущетвлять только для свободных вхождений переменной x в формулу:

$$A(f(y)) \vee \exists x B(x, x)$$

Коллизии переменных

- Рассмотрим формулу

$$\exists y(A(x) \vee B(x, y))$$

- Подстановка в неё $x := f(z)$ даст

$$\exists y(A(f(z)) \vee B(f(z), y))$$

- Однако подстановка $x := f(y)$ приведёт к проблеме

$$\exists {\color{blue}y}(A(f({\color{red}y})) \vee B(f({\color{red}y}), {\color{blue}y}))$$

- Такая ситуация носит название *коллизии* (или захвата) переменных.

Корректные подстановки

- Подстановка терма τ вместо переменной x в формулу φ называется *корректной (свободной)*, если в процессе замены всех свободных вхождений x на τ в φ ни одна переменная из τ не попадает в область действия одноименного квантора.
- Иногда про такой терм τ говорят, что он корректен для подстановки вместо x в φ (свободен для x в φ).

Индуктивное определение корректной подстановки

- Термы

$$
\begin{aligned}
&x(x := \tau) = \tau\\
&y(x := \tau) = y\\
&f(t_1, \ldots, t_n)(x := \tau) = f(t_1(x := \tau), \ldots, t_n(x := \tau))
\end{aligned}
$$

- Формулы

$$
\begin{aligned}
&R(t_1, \ldots, t_n)(x := \tau) = R(t_1(x := \tau), \ldots, t_n(x := \tau))\\
&(\neg\varphi)(x := \tau) = \neg(\varphi(x := \tau))\\
&(\varphi \wedge \psi)(x := \tau) = \varphi(x := \tau) \wedge \psi(x := \tau)\\
&(\varphi \vee \psi)(x := \tau) = \varphi(x := \tau) \vee \psi(x := \tau)\\
&(\varphi \to \psi)(x := \tau) = \varphi(x := \tau) \to \psi(x := \tau)\\
&(\forall x\varphi)(x := \tau) = \forall x\varphi\\
&(\forall y\varphi)(x := \tau) = \forall y(\varphi(x := \tau)), \quad y \notin FV(\tau)\\
&(\exists x\varphi)(x := \tau) = \exists x\varphi\\
&(\exists y\varphi)(x := \tau) = \exists y(\varphi(x := \tau)), \quad y \notin FV(\tau)
\end{aligned}
$$

Переименование связанных переменных

- *Свежей* переменной для формулы φ называется такая переменная z, что $z \notin FV(\varphi)$.
- Подстановка свежей переменной всегда корректна.
- Для любой формулы φ общезначимы формулы

$$\forall x \varphi \leftrightarrow \forall z(\varphi(x := z))$$
$$\exists x \varphi \leftrightarrow \exists z(\varphi(x := z))$$

  если переменная z свежая для φ.
- Действительно, сравним

$$[\forall x \varphi]_v = \bigwedge_{d \in D} [\varphi]_{v, x := d}$$

$$[\forall z(\varphi(x := z))]_v = \bigwedge_{d \in D} [\varphi(x := z)]_{v, z := d}$$

  В первом случае переменная z не входит в φ, во втором x не входит в $\varphi(x := z)$ свободно.

Обеспечение корректной подстановки

- Пусть имеется формула φ и подстановка $x := \tau$, порождающая коллизию.
- Это значит, что некоторая подформула φ имеет вид $\forall y \psi(x)$ (или $\exists y \psi(x)$), причем $y \in FV(\tau)$.
- Мы всегда можем обеспечить корректность подстановки, сделав в φ следующее эквивалентное преобразование. Выберем новую переменную z, свежую для ψ и не встречающуюся в τ, и перейдем к эквивалентной подформуле
$$\forall y \psi \leftrightarrow \forall z \psi(y := z)$$

План лекции

1. Общезначимые формулы
2. Подстановки термов
3. Общезначимые формулы с кванторами
4. Предваренная нормальная форма

Законы де Моргана для кванторов

- Для любой формулы φ являются общезначимыми формулы
$$\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$$
$$\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$$
- Это дает способ выразить кванторы друг через друга:
$$\forall x\varphi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi$$
$$\exists x\varphi \leftrightarrow \neg\forall x\neg\varphi$$

- Докажем, например, общезначимость $\neg\forall x \varphi(x) \to \exists x \neg\varphi(x)$.
- Рассмотрим произвольную интерпретацию и произвольную оценку ν в этой интерпретации.

$$[\neg\forall x \varphi(x)]_\nu = \mathsf{T}$$

$$[\forall x \varphi(x)]_\nu = \mathsf{F}$$

$$[\varphi(x)]_{\nu, x:=d} = \mathsf{F} \qquad \text{(для некоторого } d\text{)}$$

$$[\neg\varphi(x)]_{\nu, x:=d} = \mathsf{T}$$

$$[\exists x \neg\varphi(x)]_\nu = \mathsf{T} \qquad \blacksquare$$

Пронесение кванторов через конъюнкцию и дизъюнкцию

- Для любых формул $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются общезначимыми формулы

$$\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow \forall x \varphi(x) \wedge \forall x \psi(x)$$

$$\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow \exists x \varphi(x) \vee \exists x \psi(x)$$

$$\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \rightarrow \exists x \varphi(x) \wedge \exists x \psi(x)$$

$$\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftarrow \forall x \varphi(x) \vee \forall x \psi(x)$$

- Для любых формул $\varphi(x)$ и ψ являются общезначимыми формулы

$$\exists x(\varphi(x) \wedge \psi) \leftrightarrow \exists x \varphi(x) \wedge \psi$$

$$\forall x(\varphi(x) \vee \psi) \leftrightarrow \forall x \varphi(x) \vee \psi$$

- Приведем контрпример к необщезначимой формуле

$$\exists x \varphi(x) \wedge \exists x \psi(x) \rightarrow \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$$

- Носитель $\mathbb{Z}$, интерпретация

$$[\varphi] = x \mapsto (x < 3)$$

$$[\psi] = x \mapsto (x > 5)$$

- Приведем контрпример к необщезначимой формуле

$$\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow \forall x \varphi(x) \vee \forall x \psi(x)$$

- Носитель $\mathbb{Z}$, интерпретация ???

Контрпримеры для неэквивалентных пронесений

- Приведем контрпример к необщезначимой формуле

$$\exists x \varphi(x) \land \exists x \psi(x) \to \exists x(\varphi(x) \land \psi(x))$$

- Носитель $\mathbb{Z}$, интерпретация

$$[\varphi] = x \mapsto (x < 3)$$

$$[\psi] = x \mapsto (x > 5)$$

- Приведем контрпример к необщезначимой формуле

$$\forall x(\varphi(x) \lor \psi(x)) \to \forall x \varphi(x) \lor \forall x \psi(x)$$

- Носитель $\mathbb{Z}$, интерпретация

$$[\varphi] = x \mapsto (x \leqslant 42)$$

$$[\psi] = x \mapsto (x > 42)$$

Пронесение кванторов через импликацию

- Для любых формул $\varphi(x)$ и ψ являются общезначимыми формулы

$$\forall x(\varphi(x) \to \psi) \leftrightarrow \exists x \varphi(x) \to \psi$$

$$\exists x(\varphi(x) \to \psi) \leftrightarrow \forall x \varphi(x) \to \psi$$

$$\forall x(\psi \to \varphi(x)) \leftrightarrow \psi \to \forall x \varphi(x)$$

$$\exists x(\psi \to \varphi(x)) \leftrightarrow \psi \to \exists x \varphi(x)$$

- Для любых формул $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются общезначимыми формулы

$$\exists x(\varphi(x) \to \psi(x)) \leftrightarrow \forall x \varphi(x) \to \exists x \psi(x)$$

$$\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \leftarrow (\exists x \varphi(x) \to \forall x \psi(x))$$

Контрпример для неэквивалентного пронесения

- Приведем контрпример к необщезначимой формуле

$$\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\exists x \varphi(x) \to \forall x \psi(x))$$

- Носитель $\mathbb{N}$, интерпретация

$$[\varphi] = x \mapsto (4 \mid x)$$

$$[\psi] = x \mapsto (2 \mid x)$$

Удаление и введение кванторов

- Для любой формулы $\varphi(x)$ и терма τ, корректного для подстановки вместо x в φ, являются общезначимыми формулы

$$\forall x \varphi(x) \to \varphi(x := \tau)$$

$$\varphi(x := \tau) \to \exists x \varphi(x)$$

- В частности в качестве терма τ может быть выбрана свежая для φ переменная y:

$$\forall x \varphi(x) \to \varphi(x := y)$$
$$\varphi(x := y) \to \exists x \varphi(x)$$

- Поскольку подстановка x вместо x корректна (и ничего не меняет в формуле), то общезначимы формулы

$$\forall x \varphi \to \varphi$$
$$\varphi \to \exists x \varphi$$

Перестановка кванторов

- Для любой формулы $\varphi(x, y)$ являются общезначимыми формулы

$$\forall x \forall y \varphi(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x \varphi(x, y)$$

$$\exists x \exists y \varphi(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x \varphi(x, y)$$

$$\exists x \forall y \varphi(x, y) \to \forall y \exists x \varphi(x, y)$$

- Контрпример для формулы, обратной последней: носитель $\mathbb{N}$, интерпретация $[\varphi] = (>)$.

Корректная подстановка и эквивалентность

- Если $\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$ и терм τ корректен для подстановки вместо x в φ и в ψ, то

$$\varphi[x := \tau] \leftrightarrow \psi[x := \tau]$$

- То есть корректная подстановка сохраняет эквивалентность.
- Все предыдущие теоремы обобщаются на случай формул с произвольным количеством дополнительных свободных переменых.

План лекции

- Формула φ находится в *предваренной нормальной форме*, если она имеет вид $\mathcal{Q}_1 \ldots \mathcal{Q}_n \psi$, где $\mathcal{Q}_i$ – квантор, а ψ – безкванторная формула (в КНФ).
- Предваренной нормальной формой формулы φ называется формула φ', такая что φ' находится в ПНФ, и $\varphi \leftrightarrow \varphi'$.
- Пример. Найти ПНФ формулы $\forall x \varphi(x) \to \forall x \psi(x)$.

$$\forall x \varphi(x) \to \forall x \psi(x) \quad \leftrightarrow$$

$$\exists x(\varphi(x) \to \forall x \psi(x)) \quad \leftrightarrow$$

$$\exists x(\varphi(x) \to \forall y \psi(y)) \quad \leftrightarrow$$

$$\exists x \forall y(\varphi(x) \to \psi(y))$$

Существование ПНФ

- **Теорема.** Любая формула имеет предваренную нормальную форму.
- **Доказательство.** Индукция по структуре формулы.
- *База.* Атомарная формула имеет ПНФ (являясь ей).
- *Шаг.*
  (1). Формула имеет вид $\neg\varphi$. По IH $\varphi \leftrightarrow \mathcal{Q}_1 \ldots \mathcal{Q}_n \psi$, тогда $\neg\varphi \leftrightarrow \overline{\mathcal{Q}_1} \ldots \overline{\mathcal{Q}_n} \neg\psi$. (Здесь $\overline{\forall x} = \exists x$ и $\overline{\exists x} = \forall x$.)
  (2,3,4). Формула имеет вид $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$. Техника пронесения кванторов аналогична примеру с предыдущего слайда.
  (5,6). Формула имеет вид $\forall x \varphi$, $\exists x \varphi$. Тривиально. ■

Сколемовская нормальная форма

- Формула φ находится в *сколемовской нормальной форме*, если она имеет вид $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$, где ψ – безкванторная формула (в КНФ).
- Сколемовской нормальной формой формулы φ называется формула ψ, такая что ψ находится в СНФ, и выполнимость φ равносильна выполнимости ψ.
- Не имеет места $\varphi \leftrightarrow \psi$, поскольку мы хотим приводить ПНФ к СНФ, а элиминация кванторов существования с сохранением эквивалентности в общем случае невозможна.
- **Теорема.** Для любой замкнутой формулы φ существует формула ψ, находящаяся в СНФ, такая что

$$\varphi \text{ выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad \psi \text{ выполнима}$$