Математическая логика и теория вычислимости
Лекция 10. Секвенциальное исчисление предикатов

Денис Николаевич Москвин

Совместная магистратура JetBrains и ИТМО
Разработка ПО / Software Engineering

14.04.2021

План лекции

План лекции

Предваренная нормальная форма

- Формула φ находится в *предваренной нормальной форме*, если она имеет вид $Q_1 x_1 \ldots Q_m x_m \psi$, где Q_i – квантор, а ψ – безкванторная формула.
- Предваренной нормальной формой формулы φ называется формула φ', такая что φ' находится в ПНФ, и $\varphi \leftrightarrow \varphi'$.
- Предварённая формула называется Σ_n-формулой, если ее кванторная приставка содержит n групп кванторов, причём первыми стоят кванторы существования.
- Предварённая формула называется Π_n-формулой, если ее кванторная приставка содержит n групп кванторов, причём первыми стоят кванторы всеобщности.

Утверждения о классах Σ_n и Π_n

- Всякая формула из класса Σ_n или Π_n доказуемо эквивалентна формуле из класса Σ_{n+1}, а также формуле из класса Π_{n+1}.
- Отрицание любой формулы из класса Σ_n доказуемо эквивалентно некоторой формуле из класса Π_n и наоборот.
- Конъюнкция и дизъюнкция любых двух формул из Π_n доказуемо эквивалентна некоторой формуле из Π_n.
- Конъюнкция и дизъюнкция любых двух формул из Σ_n доказуемо эквивалентна некоторой формуле из Σ_n.
- **Теорема.** Любая формула имеет предваренную нормальную форму. (мы ее уже доказывали)

Выводимость бескванторных формул

- Если в бескванторной формуле ϕ заменить атомарные подформулы на переменные (одинаковые — на одинаковые, разные — на разные), то получившаяся пропозициональная формула называется *прототипом* исходной.
- **Теорема.** Бескванторная формула выводима (общезначима) тогда и только тогда, когда её прототип является тавтологией.
- **(**$\Leftarrow$**)** Тривиально.
- **(**$\Rightarrow$**)** (контрапозиция). Пусть прототип φ — не тавтология. Легко предъявить интерпретацию, где φ будет ложной. Носитель — замкнутые термы, значения предикатов подбираются согласованно с обращением в ложь прототипа. ■

Выводимость формул класса Π_1

- **Теорема.** Формула класса Π_1 выводима (общезначима) тогда и только тогда, когда общезначима ее бескванторная часть.
- **Доказательство.** Тривиально. ■

Выводимость формул класса Σ_1

- **Теорема Эрбрана.** Формула $\exists x_1 \ldots \exists x_k \varphi$ (где φ — бескванторная) общезначима тогда и только тогда, когда существует конечный список подстановок

$$\begin{array}{l} \varphi(x_1 := t_{11}, \ldots, x_k := t_{1k}) \\ \varphi(x_1 := t_{21}, \ldots, x_k := t_{2k}) \\ \ldots \\ \varphi(x_1 := t_{n1}, \ldots, x_k := t_{nk}) \end{array}$$

  дизъюнкция которых общезначима.
- Эту дизъюнкцию называют эрбрановской.
- **Пример.** Пусть P — предикатный символ, а c_1 и c_2 — предметные константы сигнатуры. Тогда формула $\exists x(P(c_1, x) \to P(x, c_2))$ общезначима.

Доказательство теоремы Эрбрана

- ($\Leftarrow$) Квантор $\exists$ это дизъюнкция по всем элементам носителя, если часть этой дизъюнкции общезначима, то и вся она тоже.
- ($\Rightarrow$) Пусть φ не содержит переменных, кроме $x_1, \ldots, x_k$ (остальные можно заменить константами). Рассмотрим для всех наборов замкнутых термов $t_1, \ldots, t_k$ бесконечное множество формул

$$\neg\varphi(x_1 := t_1, \ldots, x_k := t_k)$$

- Пусть оно противоречиво. Тогда берем в качестве эрбрановской дизъюнкцию отрицаний конечного набора отрицаний, используемых при выводе противоречия.
- Пусть оно непротиворечиво. Этого не может быть, поскольку тогда у него есть модель, в которой $\exists x_1 \ldots \exists x_k \varphi$ можно сделать ложной. ■

Прагматика теоремы Эрбрана

- Если сигнатура не содержит функциональных символов, то мы можем алгоритмически проверять выводимость формул класса Σ_1 (число подстановок конечно).
- Это верно и для класса Π_2.
- Но не для более богатых классов.

Сколемовские функции

- Рассмотрим утверждение

$$\forall x \exists y P(x, y)$$

- Оно эквивалентно существованию функции, которая по любому x возвращает y, такой, что $P(x, y)$.
- Но это невыразимо в логиках первого порядка:

$$\forall x \exists y P(x, y) \leftrightarrow \exists f \forall x P(x, f(x))$$

- Однако можно ввести новый унарный функциональный символ f, при этом выполнимость $\forall x \exists y \varphi$ равносильно выполнимости

$$\forall x \varphi(y := f(x))$$

- **Пример.** Формула
$$\forall x \forall y \exists z \forall u \exists v \varphi(x, y, z, u, v)$$
выполнима тогда и только тогда, когда выполнима
$$\forall x \forall y \forall u \varphi(x, y, f(x, y), u, g(x, y, u))$$
где f и g — свежие функциональные символы подходящей арности.
- **Теорема.** Для всякой замкнутой формулы φ сигнатуры σ существует формула φ' класса Π_1 сигнатуры σ с добавленными функциональными символами, которая выполнима или невыполнима одновременно с φ.

Сколемизация: двойственность

- Формула невыполнима тогда и только тогда, когда ее отрицание общезначимо.
- То есть общезначимость $\neg\forall x \exists y P(x, y)$ равносильна общезначимости
$$\neg\forall x P(x, f(x)).$$
- Вводя $Q = \neg P$ получаем, что одновременно общезначимы
$$\exists x \forall y Q(x, y) \quad \text{и} \quad \exists x Q(x, f(x))$$
- **Теорема.** Для всякой замкнутой формулы φ сигнатуры σ существует формула φ'' класса Σ_1 сигнатуры σ с добавленными функциональными символами, которая общезначима или необщезначима одновременно с φ.
- Дальше φ'' можно перевести на безкванторный язык по теореме Эрбрана.

- Полнота исчисления предикатов позволяет заменять общезначимость на выводимость.
- Вопрос о выводимости произвольной формулы мы свели к выводимости формулы из Σ_1 (с функциональными символами).
- Вопрос о выводимости произвольной формулы логики предикатов первого порядка алгоритмически неразрешим, поэтому неразрешим вопрос о выводимости формулы из Σ_1 (с функциональными символами).

План лекции

1. Теорема Эрбрана и сколемизация
2. Поиск контрпримера для формул с кванторами
3. Секвенциальное исчисление предикатов
4. Понижение мощности
5. Невыразимые предикаты
6. Элиминация кванторов

Что такое контрпример в ИП?

- Формула ИП φ общезначима тогда и только тогда, когда не существует интерпретации и оценки, в которых φ является ложной.
- Значит *контрпримером* к формуле ИП должна служить пара из интерпретации и оценки ν в этой интерпретации, в которых φ ложна.
- Поиск контрпримера осуществляется, как и прежде, разбором формулы: то, что должно быть истинным записываем слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.
- Разбор пропозициональных связок проводится точно так же, как в исчислении высказываний.

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $\exists x P(x) \vee Q(y) \to \forall x (P(x) \vee Q(y))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\frac{}{\vdash \exists x P(x) \vee Q(y) \to \forall x (P(x) \vee Q(y))}$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $\exists x P(x) \vee Q(y) \to \forall x(P(x) \vee Q(y))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\dfrac{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash \forall x(P(x) \vee Q(y))}{\vdash \exists x P(x) \vee Q(y) \to \forall x(P(x) \vee Q(y))}$$

Будем разбирать формулу $\exists x P(x) \vee Q(y) \to \forall x(P(x) \vee Q(y))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash P(x_1) \vee Q(y)}}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash \forall x(P(x) \vee Q(y))}}{\vdash \exists x P(x) \vee Q(y) \to \forall x(P(x) \vee Q(y))}$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $\exists x P(x) \vee Q(y) \to \forall x (P(x) \vee Q(y))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash P(x_1), Q(y)}}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash P(x_1) \vee Q(y)}}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash \forall x (P(x) \vee Q(y))}}{\vdash \exists x P(x) \vee Q(y) \to \forall x (P(x) \vee Q(y))}$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $\exists x P(x) \lor Q(y) \to \forall x (P(x) \lor Q(y))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x P(x) \vdash P(x_1), Q(y)} \qquad Q(y) \vdash P(x_1), Q(y)}{\exists x P(x) \lor Q(y) \vdash P(x_1), Q(y)}}{\exists x P(x) \lor Q(y) \vdash P(x_1) \lor Q(y)}}{\exists x P(x) \lor Q(y) \vdash \forall x (P(x) \lor Q(y))}}{\vdash \exists x P(x) \lor Q(y) \to \forall x (P(x) \lor Q(y))}$$

- Справа контрпримера нет: $Q(y)$ одновременно должно быть истинным и ложным в искомой интерпретации.

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $\exists x P(x) \vee Q(y) \to \forall x (P(x) \vee Q(y))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x_2) \vdash P(x_1), Q(y)}{\exists x P(x) \vdash P(x_1), Q(y)} \qquad Q(y) \vdash P(x_1), Q(y)}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash P(x_1), Q(y)}}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash P(x_1) \vee Q(y)}}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash \forall x (P(x) \vee Q(y))}}{\vdash \exists x P(x) \vee Q(y) \to \forall x (P(x) \vee Q(y))}$$

- Справа контрпримера нет: $Q(y)$ одновременно должно быть истинным и ложным в искомой интерпретации.
- Слева — есть. Носитель $D = \{x_1, x_2, y\}$; интерпретация: $[P(x_2)] = T$, $[P(x_1)] = F$, $[Q(y)] = F$; оценка $v(z) = z$ для любой переменной z.

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $Q(f(y)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\frac{}{\vdash Q(f(y)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))}$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $Q(f(y)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\frac{\overline{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x))}}{\vdash Q(f(y)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))}$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $Q(f(y)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\dfrac{\dfrac{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x)), P(\tau_1) \vee Q(\tau_1)}{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x))}}{\vdash Q(f(y)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))}$$

- τ_1 маркирует произвольный терм, который мы потом можем конкретизировать удобным нам образом.

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $Q(f(y)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x)), P(\tau_1), Q(\tau_1)}{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x)), P(\tau_1) \vee Q(\tau_1)}}{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x))}}{\vdash Q(f(y)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))}$$

- τ_1 маркирует произвольный терм, который мы потом можем конкретизировать удобным нам образом.
- Контрпримера нет: возьмем $\tau_1 = f(y)$.

План лекции

Как и в ИВ, секвенция $\Gamma \vdash \Delta$ представляет собой два упорядоченных набора формул (возможно пустых), разделенных запятыми.

Аксиома (схема):

$$\frac{}{A, \Gamma \vdash A, \Delta}$$

Правила сокращения (contraction):

$$\frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \quad (C \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \quad (\vdash C)$$

Правила перестановки (permutation):

$$\frac{\Gamma, A, B, \Theta \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Theta \vdash \Delta} \quad (P \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Theta} \quad (\vdash P)$$

Правила введения пропозициональных связок

Правила введения конъюнкции в антецедент и сукцедент:

$$\frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} \ (\wedge \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \ (\vdash \wedge)$$

Правила введения дизъюнкции в антецедент и сукцедент:

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta} \ (\vee \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \ (\vdash \vee)$$

Правила введения импликации в антецедент и сукцедент:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \to B, \Gamma \vdash \Delta} \ (\to \vdash) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \ (\vdash \to)$$

Правила введения отрицания в антецедент и сукцедент:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} \ (\neg \vdash) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \ (\vdash \neg)$$

Правила введения для квантора существования

- *Правила введения дизъюнкции в антецедент и сукцедент*:

$$\frac{A_1, \Gamma \vdash \Delta \qquad A_2, \Gamma \vdash \Delta}{A_1 \vee A_2, \Gamma \vdash \Delta} \ (\vee \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A_1, A_2, \Delta}{\Gamma \vdash A_1 \vee A_2, \Delta} \ (\vdash \vee)$$

- *Правило введения* $\exists$ *в антецедент*:

$$\frac{A[x := y], \Gamma \vdash \Delta}{\exists x A, \Gamma \vdash \Delta} \ (\exists \vdash)$$

Переменная y не должна входить свободно в Γ и Δ.

- *Правило введения* $\exists$ *в сукцедент*:

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := \tau], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A, \Delta} \ (\vdash \exists)$$

- От всех подстановок требуется корректность.

Вспомним дерево поиска контрпримера

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x)), P(\tau_1), Q(\tau_1)}{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x)), P(\tau_1) \vee Q(\tau_1)}}{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x))}}{\vdash Q(f(y)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))}$$

Мы не нашли контрпримера, но нашли вывод, взяв $\tau_1 = f(y)$. *Дерево вывода* получается такой заменой и отбрасыванием ненужных здесь применений правила сокращения:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{Q(f(y)) \vdash P(f(y)), Q(f(y))}{Q(f(y)) \vdash P(f(y)) \vee Q(f(y))}(\vdash \vee)}{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x))}(\vdash \exists)}{\vdash Q(f(y)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))}(\vdash \to)$$

Правила введения для квантора всеобщности

- *Правила введения конъюнкции в антецедент и сукцедент*:

$$\frac{A_1, A_2, \Gamma \vdash \Delta}{A_1 \wedge A_2, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\wedge \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A_1, \Delta \qquad \Gamma \vdash A_2, \Delta}{\Gamma \vdash A_1 \wedge A_2, \Delta} \quad (\vdash \wedge)$$

- *Правило введения* $\forall$ *в антецедент*:

$$\frac{A[x := \tau], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x A, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\forall \vdash)$$

- *Правило введения* $\forall$ *в сукцедент*:

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := y], \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A, \Delta} \quad (\vdash \forall)$$

  Переменная y не должна входить свободно в Γ и Δ.
- От всех подстановок требуется корректность.

Пример

Построим вывод для безусловно верной формулы $\forall x P(x) \to \forall x P(x)$:

$$\cfrac{}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}\ (\vdash\to)$$

Пример

Построим вывод для безусловно верной формулы $\forall x P(x) \to \forall x P(x)$:

$$\cfrac{\cfrac{}{\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)}\;(\forall \vdash)}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}\;(\vdash \to)$$

Пример

Построим вывод для безусловно верной формулы $\forall x P(x) \to \forall x P(x)$:

$$\dfrac{\dfrac{\overline{P(\tau_1) \vdash \forall x P(x)}\,(\vdash \forall)}{\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)}\,(\forall \vdash)}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}\,(\vdash \to)$$

Пример

Построим вывод для безусловно верной формулы $\forall x P(x) \to \forall x P(x)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(\tau_1) \vdash P(y)}{P(\tau_1) \vdash \forall x P(x)}(\vdash \forall)}{\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)}(\forall \vdash)}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}(\vdash \to)$$

Для дерева вывода возьмем $\tau_1 = y$.

Пример

Построим вывод для безусловно верной формулы $\forall x P(x) \to \forall x P(x)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(\tau_1) \vdash P(y)}{P(\tau_1) \vdash \forall x P(x)}(\vdash \forall)}{\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)}(\forall \vdash)}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}(\vdash \to)$$

Для дерева вывода возьмем $\tau_1 = y$.

Другой порядок сразу даст дерево вывода

$$\dfrac{}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}(\vdash \to)$$

Пример

Построим вывод для безусловно верной формулы $\forall x P(x) \to \forall x P(x)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(\tau_1) \vdash P(y)}{P(\tau_1) \vdash \forall x P(x)}(\vdash \forall)}{\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)}(\forall \vdash)}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}(\vdash \to)$$

Для дерева вывода возьмем $\tau_1 = y$.
Другой порядок сразу даст дерево вывода

$$\dfrac{\dfrac{}{\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)}(\vdash \forall)}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}(\vdash \to)$$

Пример

Построим вывод для безусловно верной формулы
$\forall x P(x) \to \forall x P(x)$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(\tau_1) \vdash P(y)}{P(\tau_1) \vdash \forall x P(x)}\,(\vdash \forall)}{\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)}\,(\forall \vdash)}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}\,(\vdash \to)
$$

Для дерева вывода возьмем $\tau_1 = y$.
Другой порядок сразу даст дерево вывода

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x P(x) \vdash P(y)}\,(\forall \vdash)}{\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)}\,(\vdash \forall)}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}\,(\vdash \to)
$$

Пример

Построим вывод для безусловно верной формулы
$\forall x P(x) \to \forall x P(x)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(\tau_1) \vdash P(y)}{P(\tau_1) \vdash \forall x P(x)}\,(\vdash \forall)}{\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)}\,(\forall \vdash)}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}\,(\vdash \to)$$

Для дерева вывода возьмем $\tau_1 = y$.
Другой порядок сразу даст дерево вывода

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(y) \vdash P(y)}{\forall x P(x) \vdash P(y)}\,(\forall \vdash)}{\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)}\,(\vdash \forall)}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}\,(\vdash \to)$$

Ясно, что за τ надо сразу брать y.

Выводима ли эта формула?

$$\frac{}{\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}(\forall$$

Выводима ли эта формула?

$$\cfrac{\cfrac{}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\vdash \forall)}{\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\forall$$

Выводима ли эта формула?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(y) \to P(f(f(y)))}(\vdash \to)}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}(\vdash \forall)}{\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}(\forall$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(y), P(\tau)\to P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}(\to\vdash)}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(y)\to P(f(f(y)))}(\vdash\to)}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}(\vdash \forall)}{\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}(\forall$$

Выводима ли эта формула?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(y) \vdash P(\tau), P(f(f(y))) \qquad P(y), P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}{P(y), P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}\,(\to\vdash)}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(y) \to P(f(f(y)))}\,(\vdash\to)}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\vdash \forall)}{\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\forall$$

Ничего не выходит: одновременно нельзя $\tau := y$ и $\tau := f(y)$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(y) \vdash P(\tau), P(f(f(y))) \quad P(y), P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}{P(y), P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}\,(\to\vdash)}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(y) \to P(f(f(y)))}\,(\vdash\to)}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\vdash \forall)}{\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\forall
$$

Ничего не выходит: одновременно нельзя $\tau := y$ и $\tau := f(y)$.
Выход есть: контрприменить правило сокращения (contraction) и дальше получить два разных τ_1 и τ_2:

$$
\dfrac{}{\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}
$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(y) \vdash P(\tau), P(f(f(y))) \qquad P(y), P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}{P(y), P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}\,(\to\vdash)}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(y) \to P(f(f(y)))}\,(\vdash\to)}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\vdash \forall)}{\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\forall$$

Ничего не выходит: одновременно нельзя $\tau := y$ и $\tau := f(y)$.
Выход есть: контрприменить правило сокращения (contraction) и дальше получить два разных τ_1 и τ_2:

$$\dfrac{\dfrac{\qquad}{\forall x(P(x) \to P(f(x))), \forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\forall}{\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(y)\vdash P(\tau),P(f(f(y)))\qquad P(y),P(f(\tau))\vdash P(f(f(y)))}{P(y),P(\tau)\to P(f(\tau))\vdash P(f(f(y)))}(\to\vdash)}{P(\tau)\to P(f(\tau))\vdash P(y)\to P(f(f(y)))}(\vdash\to)}{P(\tau)\to P(f(\tau))\vdash \forall x(P(x)\to P(f(f(x))))}(\vdash\forall)}{\forall x(P(x)\to P(f(x)))\vdash \forall x(P(x)\to P(f(f(x))))}(\forall$$

Ничего не выходит: одновременно нельзя $\tau := y$ и $\tau := f(y)$.
Выход есть: контрприменить правило сокращения (contraction) и дальше получить два разных τ_1 и τ_2:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(\tau_1)\to P(f(\tau_1)),\forall x(P(x)\to P(f(x)))\vdash \forall x(P(x)\to P(f(f(x))))}(\forall\vdash)}{\forall x(P(x)\to P(f(x))),\forall x(P(x)\to P(f(x)))\vdash \forall x(P(x)\to P(f(f(x))))}(\forall}{\forall x(P(x)\to P(f(x)))\vdash \forall x(P(x)\to P(f(f(x))))}$$

$$
\begin{array}{c l}
P(y) \vdash P(\tau), P(f(f(y))) \qquad P(y), P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y))) & \\ \hline
P(y), P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y))) & (\to\vdash) \\ \hline
P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(y) \to P(f(f(y))) & (\vdash\to) \\ \hline
P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x)))) & (\vdash \forall) \\ \hline
\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x)))) & (\forall
\end{array}
$$

Ничего не выходит: одновременно нельзя $\tau := y$ и $\tau := f(y)$.
Выход есть: контрприменить правило сокращения (contraction) и дальше получить два разных τ_1 и τ_2:

$$
\begin{array}{c l}
\dots & \\ \hline
P(\tau_1) \to P(f(\tau_1)), P(\tau_2) \to P(f(\tau_2)) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x)))) & \\ \hline
P(\tau_1) \to P(f(\tau_1)), \forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x)))) & (\forall \vdash) \\ \hline
\forall x(P(x) \to P(f(x))), \forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x)))) & (\forall \\ \hline
\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x)))) &
\end{array}
$$

Полнота и корректность секвенциального исчисления предикатов

- **Теорема (о корректности).** Любая формула, выводимая в секвенциальном исчислении предикатов, является общезначимой.
- **Набросок доказательства.** (1) Аксиома общезначима. (2) Правила вывода сохраняют общезначимость. ■
- **Следствие.** Секвенциальное ИП непротиворечиво.
- **Теорема (о полноте).** Любая общезначимая формула выводима в секвенциальном исчислении предикатов.
- **Набросок доказательства.** (1) Строим алгоритм на основе поиска вывода снизу вверх (постоянно применяем правило сокращения при введении метапеременной для терма). (2) Показываем, что если он не завершается, то формула не общезначима, а если завершается, то либо дерево вывода, либо контрпример. ■

Logitext

- http://logitext.mit.edu/
- Logitext is an educational proof assistant for first-order classical logic using the sequent calculus.
- It is intended to assist students who are learning Gentzen trees as a way of structuring derivations of logical statements.
- All you need to do is click on a clause to see what inference rule is triggered.
- In some cases, an input box will pop up; enter a lower case expression like z or $f(x)$.
- You can also choose to duplicate the rules by clicking "Contraction".

План лекции

Элементарная эквивалентность

- Две интерпретации заданной сигнатуры σ называют **элементарно эквивалентными**, если в них истинны одни и те же замкнутые формулы данной сигнатуры.
- Взаимно-однозначное отображение $\alpha : D_1 \to D_2$ называется *изоморфизмом* интерпретаций, если оно сохраняет все функции и предикаты этих интерпретаций. А именно для любого предикатного символа P^n и любого функционального символа f^n верно

$$\begin{array}{rcl} [P]_2\,(\alpha(x_1),\dots,\alpha(x_n)) & \Leftrightarrow & [P]_1\,(x_1,\dots,x_n) \\ [f]_2\,(\alpha(x_1),\dots,\alpha(x_n)) & = & \alpha([f]_1\,(x_1,\dots,x_n)) \end{array}$$

  на любых наборах $x_1,\dots,x_n \in D_1$.
- **Теорема.** Изоморфные интерпретации элементарно эквивалентны.

Теорема об элементарной подмодели

- Пусть имеется интерпретация некоторой сигнатуры с ностиелем D. Рассмотрим подмножество $\mathrm{D}' \subset \mathrm{D}$. Если D' замкнуто относительно сигнатурных функций, то получится новая интерпретация, называемая *подструктурой* исходной.
- **Теорема (Левенгейм-Сколем).** Пусть дана конечная или счетная сигнатура σ и ее бесконечная интерпретация с носителем D. Тогда имеется подструктура со счетным носителем $\mathrm{D}' \subset \mathrm{D}$ элементарно эквивалентная исходной.
- **Доказательство (скетч).** Берем произвольное счетное подмножество, расширяем его до замкнутого относительно сигнатурных функций и экзистенциально замкнутого. Повторяем счетное число раз. ■ (см. Верещагин, Шень, ЯиИ, 3.11)

План лекции

Выразимость предикатов

- Выразимость предиката в некоторой интерпретации некоторой сигнатуры доказать обычно просто: прямым предъявлением.
- Например, сигнатура $(+^2, =^2)$; нормальная интерпретация с носителем $\mathbb{N}$ и $[+] = +$.
- Порядок на натуральных числах (отношение $\leqslant$) мы можем выразить так:

$$x \leqslant y \;\equiv\; \exists z (y = x + z)$$

Выразимость предикатов

- Выразимость предиката в некоторой интерпретации некоторой сигнатуры доказать обычно просто: прямым предъявлением.
- Например, сигнатура $(+^2, =^2)$; нормальная интерпретация с носителем $\mathbb{N}$ и $[+] = +$.
- Порядок на натуральных числах (отношение $\leqslant$) мы можем выразить так:

$$x \leqslant y \ \equiv \ \exists z (y = x + z)$$

- Что будет если поменять носитель на $\mathbb{Z}$?

- Выразимость предиката в некоторой интерпретации некоторой сигнатуры доказать обычно просто: прямым предъявлением.
- Например, сигнатура $(+^2, =^2)$; нормальная интерпретация с носителем $\mathbb{N}$ и $[+] = +$.
- Порядок на натуральных числах (отношение $\leqslant$) мы можем выразить так:

$$x \leqslant y \;\equiv\; \exists z(y = x + z)$$

- Что будет если поменять носитель на $\mathbb{Z}$?
- Порядок станет невыразимым!

Автоморфизмы

- Пусть дана сигнатура σ и ее интерпретация с носителем D.
- Взаимно-однозначное отображение $\alpha : D \to D$ называется *автоморфизмом* интерпретации, если все функции и предикаты этой интерпретации *устойчивы* относительно α, а именно для любого предикатного символа P^n и любого функционального символа f^n верно

$$\begin{array}{rcl} [P]\,(\alpha(x_1),\dots,\alpha(x_n)) & \Leftrightarrow & [P]\,(x_1,\dots,x_n) \\ [f]\,(\alpha(x_1),\dots,\alpha(x_n)) & = & \alpha([f]\,(x_1,\dots,x_n)) \end{array}$$

  на любых наборах $x_1,\dots,x_n \in D$.
- Например, отображение $x \mapsto -x$ является автоморфизмом для нормальной интерпретация сигнатуры $(+^2, =^2)$ с носителем $\mathbb{Z}$ и $[+] = +$.

- **Теорема.** Предикат, выразимый в данной интерпретации, устойчив относительно ее автоморфизмов.
- **Доказательство.**
  - Рассмотрим произвольную оценку ν и обозначим $\alpha \circ \nu$ новую оценку, полученную применением автоморфизма к ν.
  - Индукцией по структуре терма показываем
  $$[t]_{\alpha\circ\nu} = \alpha([t]_\nu)$$
  - Индукцией по структуре формулы показываем
  $$[\varphi]_{\alpha\circ\nu} = \alpha([\varphi]_\nu) \quad \blacksquare$$
- Теперь невыразимость предиката легко доказать, предъявив автоморфизм, относительно которого предикат неустойчив.
- Например, сигнатура $(<^2, =^2)$, носитель $\mathbb{Z}$, естественная интерпретация. Невыразимый предикат $x = 0$. Автоморфизм —

- **Теорема.** Предикат, выразимый в данной интерпретации, устойчив относительно ее автоморфизмов.
- **Доказательство.**
  - Рассмотрим произвольную оценку ν и обозначим $\alpha \circ \nu$ новую оценку, полученную применением автоморфизма к ν.
  - Индукцией по структуре терма показываем

$$[t]_{\alpha \circ \nu} = \alpha([t]_\nu)$$

  - Индукцией по структуре формулы показываем

$$[\varphi]_{\alpha \circ \nu} = \alpha([\varphi]_\nu) \quad \blacksquare$$

- Теперь невыразимость предиката легко доказать, предъявив автоморфизм, относительно которого предикат неустойчив.
- Например, сигнатура $(<^2, =^2)$, носитель $\mathbb{Z}$, естественная интерпретация. Невыразимый предикат $x = 0$. Автоморфизм — $x \mapsto x + 42$.

План лекции

Невыразимые предикаты

- Мы умеем доказывать невыразимость предиката (в заданных сигнатуре и интерпретации), показывая его неустойчивость относительно некоторого автоморфизма.
- Но, например, весьма бедная пара из сигнатуры $(0^0, S^1, =^2)$ и нормальной интерпретации с носителем $\mathbb{Z}$, $[0] = 0$ и $[S] = \lambda x.x + 1$ не имеет ни одного автоморфизма. Почему $x \mapsto x + 1$ не подходит?
- Более общий способ:
  - предъявить класс предикатов;
  - индуктивно доказать что он содержит все выразимые;
  - показать, что наш предикат не содержится в этом классе.
- Сконструируем такой класс для приведенного примера (это будут предикаты, выразимые бескванторными формулами).

- Две формулы A и B данной сигнатуры назовем *эквивалентными* в данной интерпретации (нотация $A \sim B$), если они выражают один и тот же предикат.
- **Утверждение.** Для любой формулы рассматриваемой сигнатуры в рассматриваемой интерпретации имеется эквивалентная ей бескванторная формула.
- **Доказательство.** (Индукция по длине формулы.) Формула $\forall x \varphi$ эквивалентна $\neg \exists x \neg \varphi$, поэтому единственный живой случай — когда формула имеет вид

$$\psi = \exists x \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$$

где (по IH) φ — бескванторная, то есть сконструированная пропозициональными связками из атомарных формул вида

$$S(S(\ldots(S(u))\ldots)) = S(S(\ldots(S(v))\ldots))$$

Сведение к бескванторным формулам (2)

Атомарные формулы

$$S(S(\dots(S(u))\dots)) = S(S(\dots(S(v))\dots))$$

могут иметь вид (1) $x = x + c$ (меняем на истину при $c = 0$, на ложь в остальных случаях), (2) $x = c$, (3) $x + c = 0$, (4) $x = x_i + c$, (5) $x + c = x_i$.
Иначе говоря, все атомарные формулы можно записать в виде $x = t_i$, где t_i либо целая константа C_i, либо $x_j + C_i$ (C_i может быть и меньше нуля!). Построим

$$\psi' = \varphi(t_1, x_1, \dots, x_n) \vee \varphi(t_2, x_1, \dots, x_n) \vee \dots \vee \varphi(t_k, x_1, \dots, x_n)$$
$$\psi'' = \varphi[(x = t_1) := F][(x = t_2) := F]\dots[(x = t_k) := F]$$

$$\psi = \exists x \varphi(x, x_1, \dots, x_n)$$
$$\psi \sim \psi' \vee \psi'' \qquad \blacksquare$$

Невыразимость отношения порядка

- Отношения порядка $x < y$ невыразимо в наших сигнатуре и интерпретации.
- Действительно, кванторы допускают элиминацию, а все атомарные формулы имеют вид $x = y + C$.
- Но формулы такого типа не различают ситуации $x \gg y$ и $x \ll y$.

Расширение сигнатуры

- Рассмотрим расширенную сигнатуру $(0^0, S^1, =^2, <^2)$ и ее нормальную интерпретацию с носителем $\mathbb{Z}$, $[0] = 0$, $[S] = \lambda x.x + 1$ и $[<] =<$.
- **Утверждение.** Для любой формулы расширенной сигнатуры в рассматриваемой интерпретации имеется эквивалентная ей бескванторная формула.
- **Доказательство.**
  - Теперь атомарных формул больше, помимо $x = t_i$ у нас будут $x < t_i$ и $t_i < x$.
  - Вместо ψ'' нам нужно попробовать числа изо всех промежутков, на которые $\{t_i\}$ разбивает $\mathbb{Z}$
  - Подойдет такая конструкция

$$
\begin{aligned}
\psi' &= \varphi(t_1, x_1, \ldots, x_n) \lor \ldots \lor \varphi(t_k, x_1, \ldots, x_n) \\
\psi'' &= \varphi(t_1 - 1, x_1, \ldots, x_n) \lor \ldots \lor \varphi(t_k - 1, x_1, \ldots, x_n) \\
\psi''' &= \varphi(t_1 + 1, x_1, \ldots, x_n) \lor \ldots \lor \varphi(t_k + 1, x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

$$
\psi \sim \psi' \lor \psi'' \lor \psi''' \qquad \blacksquare
$$