

Курс: Функциональное программирование Практика 2. Рекурсия и редукция

Разминка

- Найдите WHNF и NF для

$\omega 2$

$\omega 3$

ωn

Напоминание: $\omega \equiv \lambda x. x x$.

Каррирование

Если функция двух аргументов задана в традиционном стиле $f(\text{pair } x \ y)$ (на паре, т.е. декартовом произведении), то перейти к стандартной записи можно *каррированием*:

$$\text{curry} = \lambda f x y. f(\text{pair } x \ y)$$

- Реализуйте обратную процедуру, `uncurry`.

Функция предшествования для чисел Чёрча

Вспомогательные функции

$$\text{zp} \equiv \text{pair } 0 \ 0$$

$$\text{sp} \equiv \lambda p. \text{pair } (\text{snd } p) (\text{succ } (\text{snd } p))$$

Вторая работает так

$$\text{sp } (\text{pair } i \ j) = \text{pair } j \ (j + 1)$$

$$\text{sp}^0 (\text{zp}) = \text{pair } 0 \ 0$$

$$\text{sp}^m (\text{zp}) = \text{pair } (m - 1) \ m$$

(здесь $m > 0$). Тогда функция предшествования:

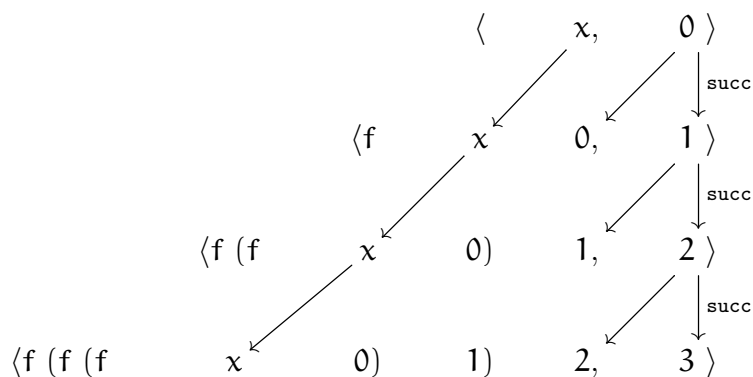
$$\text{pred} = \lambda m. \text{fst } (m \ \text{sp } \text{zp})$$

- Какая у неё временная сложность?
- Что нужно поменять, чтобы вышел факториал?

Числа Чёрча: **примитивная рекурсия**.

Обобщим предыдущую схему

$$\begin{aligned} \text{xz} &\equiv \lambda x. \text{pair } x \ 0 \\ \text{fs} &\equiv \lambda f p. \text{pair } (f (\text{fst } p) (\text{snd } p)) (\text{succ } (\text{snd } p)) \\ \text{rec} &\equiv \lambda m f x. \text{fst } (m (\text{fs } f) (\text{xz } x)) \end{aligned}$$



В частности,

$$\text{pred} = \lambda m. \text{rec } m (\lambda x y. y) 0$$

- ▶ Реализуйте факториал через комбинатор примитивной рекурсии `rec`.
- ▶ Реализуйте функцию суммирования чисел от 1 до `n`.
- ▶ Реализуйте функцию нахождения `n`-ой частичной суммы ряда $\sum_{k=1}^n f(k)$.

Конструкторы **СПИСКОВ** можно определить так:

$$\begin{aligned} \text{nil} &\equiv \lambda c n. n \\ \text{cons} &\equiv \lambda e l c n. c e (l c n) \end{aligned}$$

Например,

$$\begin{aligned} [] &= \text{nil} = \lambda c n. n \\ [5, 3, 2] &= \text{cons } 5 (\text{cons } 3 (\text{cons } 2 \text{ nil})) = \lambda c n. c 5 (c 3 (c 2 n)) \end{aligned}$$

Функция, определяющая пуст ли список

$$\text{empty} \equiv \lambda l. l (\lambda h t. \text{fls}) \text{tru}$$

- ▶ Проверьте правильность работы `empty`.
- ▶ Попробуйте найти более «короткую» версию `empty`.
- ▶ Постройте функцию `head`, возвращающую голову списка, например

$$\text{head } [5, 3, 2] = 5$$

Комбинаторы неподвижной точки

Хотя для комбинатора неподвижной точки Карри $Y \equiv \lambda f. (\lambda x. f (x x))(\lambda x. f (x x))$ выполняется $YF =_{\beta} F(YF)$, но неверно ни $YF \rightarrow_{\beta} F(YF)$, ни $F(YF) \rightarrow_{\beta} YF$:

$$\begin{aligned} YF &\equiv (\lambda f. (\lambda x. f (x x))(\lambda x. f (x x))) F \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda x. F (x x))(\lambda x. F (x x)) \\ &\rightarrow_{\beta} F((\lambda x. F (x x))(\lambda x. F (x x))) \rightarrow_{\beta} \dots \end{aligned}$$

- ▶ Проверьте, что комбинатор неподвижной точки Тьюринга Θ

$$A = \lambda x y. y (x x y), \quad \Theta = A A$$

обладает одним из свойств редуцируемости.

- ▶ Найдите G , такой что $\forall X G X \rightarrow X(X G)$.

Домашнее задание

- ▶(1 балл) Приведите пример замкнутого чистого λ -терма находящегося
 - в слабой головной нормальной форме, но не в головной нормальной форме;
 - в головной нормальной форме, но не в нормальной форме.

- ▶(1 балл) Напишите функции: `minus`, вычитающую числа Чёрча, `equals`, сравнивающую два числа Чёрча на предмет равенства, а также всевозможные неравенства, строгие и нестрогие, `lt`, `gt`, `le`, `ge`.

- ▶ (1 балл) Постройте функции:
 - `sum` суммирующую элементы списка, например

$$\text{sum } [5, 3, 2] = 10$$

- `length` вычисляющую длину списка, например

$$\text{length } [5, 3, 2] = 3$$

- ▶ (3 балла) Постройте функцию `tail`, возвращающую хвост списка, например

$$\text{tail } [5, 3, 2] = [3, 2]$$

- ▶(2 балла) Используя Y -комбинатор, сконструируйте
 - «пожиратель», то есть такой терм F , который для любого M обеспечивает $FM = F$.
 - терм F таким образом, чтобы для любого M выполнялось $FM = MF$.
 - терм F таким образом, чтобы для любых термов M и N выполнялось $FMN = NF(NMF)$.

- ▶(2 балла) Пусть имеются взаимно-рекурсивное определение функций f и g :

$$\begin{aligned} f &= Ffg \\ g &= Gfg \end{aligned}$$

Используя Y -комбинатор, найдите нерекурсивные определения для f и g .