Типы в языках программирования
Лекция 5. Нормализация для простой системы и типы-пересечения

Денис Николаевич Москвин

ИТМО, корпоративная магистратура JetBrains
Разработка ПО / Software Engineering

17.03.2021

План лекции

1. Понятие нормализации
2. Слабая нормализация
3. Сильная нормализация *
4. Типы-пересечения
5. Типы-пересечения через вложение типов

План лекции

Слабая и сильная нормализация для терма

Определение

Терм называют ***слабо (weak) нормализуемым*** (WN), если существует последовательность β-редукций, приводящих его к β-нормальной форме.

Определение

Терм называют ***сильно (strong) нормализуемым*** (SN), если любая последовательность β-редукций, приводит его к β-нормальной форме.

Примеры

Терм $\mathbf{K\,I\,K}$ — сильно нормализуем,
терм $\mathbf{K\,I\,\Omega}$ — слабо нормализуем,
терм $\mathbf{\Omega}$ — не нормализуем.

Слабая и сильная нормализация для системы типов

Определение

Систему типов называют ***слабо нормализуемой*** если все её допустимые термы слабо нормализуемы.

Определение

Систему типов называют ***сильно нормализуемой*** если все её допустимые термы сильно нормализуемы.

Теорема

Система типов $\lambda_{\rightarrow}$ сильно нормализуема.

В отношении нормализации и карриевская и черчевская системы ведут себя одинаково, поэтому мы будем рассматривать их совместно, атрибутируя типами все, что можно, в тот момент, когда нам это потребуется.

План лекции

1. Понятие нормализации
2. Слабая нормализация
3. Сильная нормализация *
4. Типы-пересечения
5. Типы-пересечения через вложение типов

Способы порождения редексов при β-редукции

Имеются 4 способа образования «нового» β-редекса в процессе редукции:

1. Создание:

$$(\lambda x.\ \ldots (x\,P)\ldots)(\lambda y.\,Q) \longrightarrow \ldots((\lambda y.\,Q)P)\ldots$$

2. Размножение (тут редекс не по-настоящему «новый»):

$$(\lambda x.\ \ldots x \ldots x \ldots)((\lambda y.\,Q)R) \longrightarrow \ldots((\lambda y.\,Q)R)\ldots((\lambda y.\,Q)R)\ldots$$

3. Спрятанный редекс:

$$(\lambda x.\,\lambda y.\,Q)P\,R \longrightarrow (\lambda y.\,[x \mapsto P]Q)\,R$$

4. Сокращение комбинатора $\mathbf{I}$:

$$(\lambda x.\,x)(\lambda y.\,Q)P \longrightarrow (\lambda y.\,Q)P$$

Как доказать слабую нормализуемость?

- Схема доказательства:
  1. Зададим подходящую меру на термах.
  2. Опишем конкретную стратегию, каждый шаг которой сокращает эту меру.
- Тривиальные меры (например, число β-редексов) не работают.
- Решение задачи *сильной* нормализации подобным образом представляет собой открытую проблему.

Мера терма: подготовительные определения

Определение: порядок типа

Для типа ρ его ***порядок*** $\mathrm{ord}(\rho)$ определим индуктивно:

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}(\alpha) &= 0,\\ \mathrm{ord}(\sigma \to \tau) &= \max(\mathrm{ord}(\sigma)+1, \mathrm{ord}(\tau)).\end{aligned}$$

или, эквивалентно:

$$\begin{aligned}&\mathrm{ord}(\alpha) = 0,\\ &\mathrm{ord}(\sigma_1 \to \ldots \to \sigma_n \to \alpha) = 1 + \max(\mathrm{ord}(\sigma_1), \ldots, \mathrm{ord}(\sigma_n)).\end{aligned}$$

Определение: высота редекса

Высотой редекса $(\lambda x^\sigma.\, P)Q$ называется порядок типа его левого аппликанда $\lambda x^\sigma.\, P$.

Например, $h((\lambda x^\sigma.\, x)Q) = \mathrm{ord}(\sigma) + 1$. Отметим, что $Q : \sigma$.

Мера терма: определение

Определение: мера терма

Для терма P его ***меру*** $m(P)$ определим как лексикографическую пару:

$$m(P) = (h_{\max}(P), \sharp N)$$

где $h_{\max}(P)$ — наибольшая высота редекса в P, а $\sharp N$ — число редексов такой высоты.

Стратегия слабой нормализации

Выбирать для сокращения редекс наибольшей высоты, который не содержит субредексов такой же высоты.

1. Это всегда можно сделать. (почти тривиально)
2. Это всегда приводит к сокращению нашей меры. (перебор 4 случаев)

Типизируем редексы

1. Создание: $h_0 = \mathrm{ord}((\sigma \to \tau) \to \rho)$, $h_1 = \mathrm{ord}(\sigma \to \tau)$.

$$(\lambda x^{\sigma\to\tau}.\,\underbrace{\ldots(x\,P^{\sigma})\ldots}_{\rho})(\lambda y^{\sigma}.\,Q^{\tau}) \longrightarrow \underbrace{\ldots((\lambda y^{\sigma}.\,Q^{\tau})P^{\sigma})\ldots}_{\rho}$$

Типизируем редексы

1. Создание: $h_0 = \mathrm{ord}((\sigma \to \tau) \to \rho)$, $h_1 = \mathrm{ord}(\sigma \to \tau)$.

$$(\lambda x^{\sigma\to\tau}.\, \underbrace{\ldots(x\, P^{\sigma})\ldots}_{\rho})(\lambda y^{\sigma}.\, Q^{\tau}) \longrightarrow \underbrace{\ldots((\lambda y^{\sigma}.\, Q^{\tau})P^{\sigma})\ldots}_{\rho}$$

2. Размножение: $h_0 = \mathrm{ord}(\tau \to \rho)$, $h_1 = \mathrm{ord}(\sigma \to \tau)$.

$$(\lambda x^{\tau}.\, \underbrace{\ldots x^{\tau}\ldots x^{\tau}\ldots}_{\rho})((\lambda y^{\sigma}.\, Q^{\tau})R^{\sigma}) \longrightarrow \underbrace{\ldots((\lambda y^{\sigma}.\, Q^{\tau})R^{\sigma})\ldots((\lambda y}_{\rho}$$

Типизируем редексы

1. Создание: $h_0 = \mathrm{ord}((\sigma \to \tau) \to \rho)$, $h_1 = \mathrm{ord}(\sigma \to \tau)$.

$$(\lambda x^{\sigma\to\tau}.\, \underbrace{\ldots (x\, P^{\sigma}) \ldots}_{\rho})(\lambda y^{\sigma}.\, Q^{\tau}) \longrightarrow \underbrace{\ldots ((\lambda y^{\sigma}.\, Q^{\tau}) P^{\sigma}) \ldots}_{\rho}$$

2. Размножение: $h_0 = \mathrm{ord}(\tau \to \rho)$, $h_1 = \mathrm{ord}(\sigma \to \tau)$.

$$(\lambda x^{\tau}.\, \underbrace{\ldots x^{\tau} \ldots x^{\tau} \ldots}_{\rho})((\lambda y^{\sigma}.\, Q^{\tau}) R^{\sigma}) \longrightarrow \underbrace{\ldots ((\lambda y^{\sigma}.\, Q^{\tau}) R^{\sigma}) \ldots ((\lambda y}_{\rho}$$

3. Спрятанный: $h_0 = \mathrm{ord}(\sigma \to \tau \to \rho)$, $h_1 = \mathrm{ord}(\tau \to \rho)$.

$$(\lambda x^{\sigma}.\, \lambda y^{\tau}.\, Q^{\rho}) P^{\sigma} R^{\tau} \longrightarrow (\lambda y^{\tau}.\, [x \mapsto P] Q^{\rho})\, R^{\tau}$$

Типизируем редексы

1. Создание: $h_0 = \mathrm{ord}((\sigma \to \tau) \to \rho)$, $h_1 = \mathrm{ord}(\sigma \to \tau)$.

$$(\lambda x^{\sigma\to\tau}.\, \underbrace{\ldots(x\, P^{\sigma})\ldots}_{\rho})(\lambda y^{\sigma}.\, Q^{\tau}) \longrightarrow \underbrace{\ldots((\lambda y^{\sigma}.\, Q^{\tau})P^{\sigma})\ldots}_{\rho}$$

2. Размножение: $h_0 = \mathrm{ord}(\tau \to \rho)$, $h_1 = \mathrm{ord}(\sigma \to \tau)$.

$$(\lambda x^{\tau}.\, \underbrace{\ldots x^{\tau}\ldots x^{\tau}\ldots}_{\rho})((\lambda y^{\sigma}.\, Q^{\tau})R^{\sigma}) \longrightarrow \underbrace{\ldots((\lambda y^{\sigma}.\, Q^{\tau})R^{\sigma})\ldots((\lambda y}_{\rho}$$

3. Спрятанный: $h_0 = \mathrm{ord}(\sigma \to \tau \to \rho)$, $h_1 = \mathrm{ord}(\tau \to \rho)$.

$$(\lambda x^{\sigma}.\, \lambda y^{\tau}.\, Q^{\rho})P^{\sigma}\, R^{\tau} \longrightarrow (\lambda y^{\tau}.\, [x \mapsto P]Q^{\rho})\, R^{\tau}$$

4. $\mathbf{I}$: $h_0 = \mathrm{ord}((\sigma \to \tau) \to \sigma \to \tau)$, $h_1 = \mathrm{ord}(\sigma \to \tau)$.

$$(\lambda x^{\sigma\to\tau}.\, x)(\lambda y^{\sigma}.\, Q^{\tau})P^{\sigma} \longrightarrow (\lambda y^{\sigma}.\, Q^{\tau})P^{\sigma}$$

План лекции

1. Понятие нормализации
2. Слабая нормализация
3. Сильная нормализация *
4. Типы-пересечения
5. Типы-пересечения через вложение типов

Проблемы с доказательством

- Докажем, что любой терм, имеющий тип в системе $\lambda_{\rightarrow}$, сильно нормализуем. (См. [Bar92])
- Обозначим через $\mathcal{SN}$ множество сильно нормализуемых термов из Λ.
- Проблема: $M \in \mathcal{SN} \wedge N \in \mathcal{SN} \nRightarrow M\,N \in \mathcal{SN}$. Например,

Проблемы с доказательством

- Докажем, что любой терм, имеющий тип в системе $\lambda_{\rightarrow}$, сильно нормализуем. (См. [Bar92])
- Обозначим через SN множество сильно нормализуемых термов из Λ.
- Проблема: $M \in SN \wedge N \in SN \not\Rightarrow M\,N \in SN$. Например, $M = N = \omega = \lambda x.\, x\, x$.

Проблемы с доказательством

- Докажем, что любой терм, имеющий тип в системе $\lambda_{\to}$, сильно нормализуем. (См. [Bar92])
- Обозначим через SN множество сильно нормализуемых термов из Λ.
- Проблема: $M \in SN \wedge N \in SN \not\Rightarrow M\,N \in SN$. Например, $M = N = \omega = \lambda x.\,x\,x$.
- Однако в обратную сторону это верно: $M\,N \in SN \Rightarrow M \in SN \wedge N \in SN$. Почему?

Проблемы с доказательством

- Докажем, что любой терм, имеющий тип в системе $\lambda_{\rightarrow}$, сильно нормализуем. (См. [Bar92])
- Обозначим через $\mathcal{SN}$ множество сильно нормализуемых термов из Λ.
- Проблема: $M \in \mathcal{SN} \wedge N \in \mathcal{SN} \nRightarrow M\,N \in \mathcal{SN}$. Например, $M = N = \omega = \lambda x.\, x\, x$.
- Однако в обратную сторону это верно: $M\,N \in \mathcal{SN} \Rightarrow M \in \mathcal{SN} \wedge N \in \mathcal{SN}$. Почему?
- Верно ли, что $[x \mapsto N]M \in \mathcal{SN} \Rightarrow (\lambda x.\, M)N \in \mathcal{SN}$?

Проблемы с доказательством

- Докажем, что любой терм, имеющий тип в системе $\lambda_{\rightarrow}$, сильно нормализуем. (См. [Bar92])
- Обозначим через $\mathcal{SN}$ множество сильно нормализуемых термов из Λ.
- Проблема: $M \in \mathcal{SN} \wedge N \in \mathcal{SN} \not\Rightarrow M\,N \in \mathcal{SN}$. Например, $M = N = \omega = \lambda x.\, x\, x$.
- Однако в обратную сторону это верно: $M\,N \in \mathcal{SN} \Rightarrow M \in \mathcal{SN} \wedge N \in \mathcal{SN}$. Почему?
- Верно ли, что $[x \mapsto N]M \in \mathcal{SN} \Rightarrow (\lambda x.\, M)N \in \mathcal{SN}$? Нет! $N = \Omega \wedge x \notin FV(M)$.

Проблемы с доказательством

- Докажем, что любой терм, имеющий тип в системе $\lambda_{\to}$, сильно нормализуем. (См. [Bar92])
- Обозначим через $\mathcal{SN}$ множество сильно нормализуемых термов из Λ.
- Проблема: $M \in \mathcal{SN} \wedge N \in \mathcal{SN} \not\Rightarrow M\,N \in \mathcal{SN}$. Например, $M = N = \omega = \lambda x.\, x\, x$.
- Однако в обратную сторону это верно:
  $M\,N \in \mathcal{SN} \Rightarrow M \in \mathcal{SN} \wedge N \in \mathcal{SN}$. Почему?
- Верно ли, что $[x \mapsto N]M \in \mathcal{SN} \Rightarrow (\lambda x.\, M)N \in \mathcal{SN}$? Нет!
  $N = \Omega \wedge x \notin FV(M)$.
  Да, если потребовать $N \in \mathcal{SN}$. Докажем ниже в чуть более общем виде.

- Для произвольных множеств термов $X, Y \subset \Lambda$ определим подмножество «лямбда-определимых» функций из X в Y:

$$X \to Y = \{F \in \Lambda \mid \forall S \in X.\ F\,S \in Y\}$$

- Для произвольного типа $\rho \in \mathbb{T}$ определим интерпретацию $[\![\rho]\!] \subset \Lambda$ индуктивно:
  - $[\![\alpha]\!] = SN$, где α — переменная типа;
  - $[\![\sigma \to \tau]\!] = [\![\sigma]\!] \to [\![\tau]\!]$, где σ и τ — произвольные типы.
- Пример:
  $[\![\alpha \to \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \to [\![\beta]\!] = SN \to SN$.
- Интерпретация «шире» типа: нам достаточно, чтобы типизированный терм вкладывался в свою интерпретацию («корректность интерпретации», докажем своевременно).

Множество $X \subseteq SN$ называется ***насыщенным (saturated)***, если:

1. $\forall x \in V \quad \forall n \geqslant 0 \quad \forall R_1, \ldots, R_n \in SN$
   $x \overrightarrow{R} \in X$,
   то есть насыщенное множество X содержит все переменные и все аппликации переменных к SN-термам;
2. $\forall P \in \Lambda \quad \forall Q \in SN \quad \forall n \geqslant 0 \quad \forall R_1, \ldots, R_n \in SN$
   $([x \mapsto Q]P) \overrightarrow{R} \in X \;\Rightarrow\; (\lambda x.\, P) Q \overrightarrow{R} \in X$,
   то есть вместе с любым своим термом насыщенное множество X содержит все те его одношаговые экспансии, которые дают этот терм сокращением головного редекса, причем подставляемый терм (Q) должен быть сильно нормализуем.

$$y\, \mathbf{I}\, (\mathbf{I}\, \mathbf{K})\, (\omega\, \mathbf{I})\, z\, \mathbf{B} \in X$$

$$(\lambda x.\, y\, x\, (x\, \mathbf{K})\, (\omega\, x))\, \mathbf{I}\, z\, \mathbf{B} \in X$$

Леммы о насыщенных множествах

Выполняются следующие леммы:

1. Множество $\mathcal{SN}$ сильно нормализуемых термов насыщенно.
2. Если множества термов $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ насыщенны, то множество $\mathcal{X} \to \mathcal{Y} = \{F \in \Lambda \mid \forall S \in \mathcal{X}.\ F\,S \in \mathcal{Y}\}$ тоже насыщенно.
3. Для произвольного типа $\rho \in \mathbb{T}$ интерпретация $[[\rho]]$ насыщенна.

Лемма 3 доказывается индукцией по структуре типа: базу обслуживает Лемма 1, а шаг — Лемма 2.

- Множество всех насыщенных подмножеств Λ называют $\mathcal{SAT}$.

Лемма 1: $\mathcal{SN} \in \mathcal{SAT}$

Лемма 1

Множество сильно нормализуемых термов насыщенно: $\mathcal{SN} \in \mathcal{SAT}$.

- $\mathcal{SN} \subseteq \mathcal{SN}$.
- Первое требование к насыщенности выполняется тривиально: для $\forall x \in V$
$$x\,\overrightarrow{R} \in \mathcal{SN}$$
- Пусть
$$([x \mapsto Q]P)\,\overrightarrow{R} \in \mathcal{SN} \tag{1}$$
Покажем, что
$$(\lambda x.\, P)Q\,\overrightarrow{R} \in \mathcal{SN} \tag{2}$$

Лемма 1: $\mathcal{SN} \in \mathcal{SAT}$ (продолжение)

- $[x \mapsto Q]P \in \mathcal{SN}$ как подтерм $\mathcal{SN}$-терма, поэтому $P \in \mathcal{SN}$.
- Возьмем $(\lambda x.\, P)Q\overrightarrow{R}$ и сделаем конечное число редукций в P, Q и прочих $\overrightarrow{R}$. Получим:

$$(\lambda x.\, P')Q'\overrightarrow{R'}$$

Сократим:

$$([x \mapsto Q']P')\overrightarrow{R'} \tag{3}$$

Это редукт сильно нормализуемого $([x \mapsto Q]P)\overrightarrow{R}$, поэтому он тоже $\mathcal{SN}$, откуда $(\lambda x.\, P)Q\overrightarrow{R}$ тоже $\mathcal{SN}$. ■

Лемма 2: $X, Y \in SAT \Rightarrow X \to Y \in SAT$

Лемма 2

Если X и Y насыщенны, то $X \to Y = \{F \in \Lambda \mid \forall S \in X.\ F\,S \in Y\}$ тоже насыщенно.

- X насыщенно, поэтому для $\forall x \in V$ верно $x \in X$.
- $F \in X \to Y \;\Rightarrow\; F\,x \in Y \;\Rightarrow\; F\,x \in SN \;\Rightarrow\; F \in SN$ (определение $\to$; $Y \subseteq SN$; F — подтерм $F\,x$)
  То есть $X \to Y \subseteq SN$.
- Для $\forall x \in V$ и $\forall S \in X$ верно $x\,\overrightarrow{R}\,S \in Y$, поскольку $X \subseteq SN$, а Y — насыщено. Отсюда следует первое условие насыщенности для $X \to Y$:

$$\forall x \in V \quad x\,\overrightarrow{R} \in X \to Y$$

- Второе условие насыщенности для $X \to Y$ получается аналогично из второго условия для Y

$$([x \mapsto Q]P)\,\overrightarrow{R}\,S \in Y \Rightarrow (\lambda x.\,P)\,Q\,\overrightarrow{R}\,S \in Y \quad \blacksquare$$

Корректность интерпретации $[\![-]\!]$: проблема

- Наша цель теперь доказать корректность интерпретации, то есть $M : \sigma \Rightarrow M \in [\![\sigma]\!]$.
- Однако утверждение типизации в общем случае имеет контекст: $\Gamma \vdash M : \sigma$.
- При индукции по выводу $\Gamma \vdash M : \sigma$ возникает проблема для случая, когда $M = \lambda x.\, M'$ и, соответственно, $\sigma = \sigma_1 \to \sigma_2$. Нужно доказать (имея IH $M' \in [\![\sigma_2]\!]$)

$$
\begin{array}{l}
\lambda x.\, M' \in [\![\sigma_1 \to \sigma_2]\!] \\
\lambda x.\, M' \in \{F \mid \forall P \in [\![\sigma_1]\!].\, F\,P \in [\![\sigma_2]\!]\} \\
\forall P \in [\![\sigma_1]\!] \Rightarrow (\lambda x.\, M')\,P \in [\![\sigma_2]\!] \\
\forall P \in [\![\sigma_1]\!] \Rightarrow [x \mapsto P]\,M' \in [\![\sigma_2]\!]
\end{array}
$$

Это никак не следует из нашего определения интерпретации.

- Решение проблемы — задать оценку (valuation) для всех переменных контекста Γ.

Теорема. Корректность интерпретации $[\![-]\!]$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 : \rho_1, \ldots, x_k : \rho_k \vdash M : \sigma \\ P_1 \in [\![\rho_1]\!], \ldots, P_k \in [\![\rho_k]\!] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$[x_1 \mapsto P_1, \ldots, x_k \mapsto P_k]\, M \in [\![\sigma]\!].$$

Доказательство. Индукция по выводу $\Gamma \vdash M : \sigma$.

Корректность, доказательство

- $\Gamma \vdash M : \sigma$ при $M = x$.
  По лемме генерации $x : \sigma \in \Gamma$. Тогда для произвольного $P \in [[\sigma]]$ получаем $[x \mapsto P]\, M = [x \mapsto P]\, x = P$.
- $\Gamma \vdash M : \sigma$ при $M = M_1\, M_2$.
  По лемме генерации $\Gamma \vdash M_1 : \tau \to \sigma$ и $\Gamma \vdash M_2 : \tau$.
  Обозначим подстановку $[x_1 \mapsto P_1, \ldots, x_k \mapsto P_k]$ через S.
  По IH имеем $S(M_1) \in [[\tau \to \sigma]]$ и $S(M_2) \in [[\tau]]$. Но

$$S(M_1\, M_2) = (S(M_1))(S(M_2)) \in [[\sigma]]$$

  в соответствии с интерпретацией стрелочного типа в определении интерпретации.

- $\Gamma \vdash M : \sigma$ при $M = \lambda x.\, M'$.
  По лемме генерации $\sigma = \sigma_1 \to \sigma_2$ и $\Gamma, x : \sigma_1 \vdash M' : \sigma_2$.
  Обозначим подстановку $[x_1 \mapsto P_1, \ldots, x_k \mapsto P_k]$ через S.
  По IH имеем, что для произвольного $P \in [[\sigma_1]]$ верно

  $$(S \circ [x \mapsto P])(M') \in [[\sigma_2]].$$

  Рассмотрим

  $$(S(\lambda x.\, M'))P = (\lambda x.\, S(M'))P = (S \circ [x \mapsto P])(M') \in [[\sigma_2]].$$

  Но поскольку $P \in [[\sigma_1]]$ и произволен, имеем
  $S(\lambda x.\, M') \in [[\sigma_1 \to \sigma_2]]$.

■

$$\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; M \in SN$$

Доказательство.

- Положим в предыдущей теореме все $P_i = x_i$. Это можно сделать, поскольку каждое $[[\rho_i]]$ насыщенно, а значит содержит любые термовые переменные, $x_i \in [[\rho_i]]$.
- Тогда подстановка в заключении теоремы станет тождественной, и мы получим $M \in [[\sigma]] \subseteq SN$.

■

План лекции

Типы системы $\lambda_\cap$

Множество типов $\mathbb{T}_\cap$ системы $\lambda_\cap$ определяется индуктивно:

$\alpha, \beta, \ldots \in \mathbb{T}_\cap$	(переменные типа)
$\mathsf{U} \in \mathbb{T}_\cap$	(универсальный тип)
$\sigma, \tau \in \mathbb{T}_\cap \Rightarrow (\sigma \to \tau) \in \mathbb{T}_\cap$	(стрелочные типы)
$\sigma, \tau \in \mathbb{T}_\cap \Rightarrow (\sigma \cap \tau) \in \mathbb{T}_\cap$	(типы-пересечения)

Бинарные связки $\to$ и $\cap$ считаются *правоассоциативными*, приоритет $\cap$ выше $\to$:

$$\alpha \to (\beta \to (\alpha \cap \beta)) \;\equiv\; \alpha \to \beta \to \alpha \cap \beta$$

См. [Hin92, BDS13]

Интуиции для $\lambda_\cap$

- Тип $\sigma \cap \tau$ интуитивно рассматривается как тип для терма, которому можно приписать и тип σ, и тип τ.

$$\lambda x.\, x : (\alpha \to \alpha) \cap ((\beta \to \gamma) \to \beta \to \gamma).$$

- Следует отличать тип-пересечения от типа-произведения (пары или конъюнкции):
  - для конструирования выражения типа $\sigma \times \tau$ нам нужно иметь *два* выражения, одно типа σ, другое типа τ;
  - для пересечения $\sigma \cap \tau$ нам необходимо иметь *одно* выражение, которому можно приписать оба типа.
- Универсальный тип $\mathcal{U}$ интуитивно рассматривается как пустое пересечение.
- Универсальный тип можно (по определению) приписать любому терму, отсюда его название.

Формализм типизации для $\lambda_\cap CD$ (Coppo-Dezani, 1978)

$$\Gamma \vdash M : \mathfrak{U} \qquad (\text{Ax } \mathfrak{U})$$

$$\Gamma \vdash x : \sigma, \ \text{если } (x : \sigma) \in \Gamma \qquad (\text{Ax})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\,N : \tau} \qquad (\to \text{E})$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.\,M : \sigma \to \tau} \qquad (\to \text{I})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \cap \tau}{\Gamma \vdash M : \sigma} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \cap \tau}{\Gamma \vdash M : \tau} \qquad (\cap \text{E})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \quad \Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash M : \sigma \cap \tau} \qquad (\cap \text{I})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \lambda x.\,M\,x : \sigma}{\Gamma \vdash M : \sigma}, \ \text{если } x \notin FV(M) \qquad (\eta)$$

Примеры

Самоприменение типизируемо в $\lambda_\cap$.

$$\dfrac{\dfrac{x^{\alpha\cap(\alpha\to\beta)} \vdash x : \alpha\cap(\alpha\to\beta)}{x^{\alpha\cap(\alpha\to\beta)} \vdash x : \alpha\to\beta}\,(\cap E) \qquad \dfrac{x^{\alpha\cap(\alpha\to\beta)} \vdash x : \alpha\cap(\alpha\to\beta)}{x^{\alpha\cap(\alpha\to\beta)} \vdash x : \alpha}\,(\cap E)}{\dfrac{x^{\alpha\cap(\alpha\to\beta)} \vdash x\,x : \beta}{\vdash \lambda x.\,x\,x : \alpha\cap(\alpha\to\beta)\to\beta}\,(\to I)}\,(\to E)$$

Универсальный тип позволяет организовывать странные конструкции.

$$\dfrac{\dfrac{}{x^{U\to U} \vdash x : U}\,(\mathrm{Ax}\ U)}{\vdash \lambda x.\,x : (U\to U)\to U}\,(\to I)$$

Основное назначение универсального типа — маркировать конструкции с потенциальной расходимостью.

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{f^{U\to\tau}, x^{U\to\tau} \vdash x\,x : U}\,(\mathrm{Ax}\ U)}{f^{U\to\tau}, x^{U\to\tau} \vdash f\,(x\,x) : \tau}\,(\to E)}{f^{U\to\tau} \vdash \lambda x.\, f\,(x\,x) : (U \to \tau) \to \tau}\,(\to I)
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{f^{U\to\tau}, x^{U} \vdash x\,x : U}\,(\mathrm{Ax}\ U)}{f^{U\to\tau}, x^{U} \vdash f\,(x\,x) : \tau}\,(\to E)}{f^{U\to\tau} \vdash \lambda x.\, f\,(x\,x) : U \to \tau}\,(\to I)
}{
\dfrac{f^{U\to\tau} \vdash (\lambda x.\, f\,(x\,x))\,(\lambda x.\, f\,(x\,x)) : \tau}{\vdash \mathbf{Y} : (U \to \tau) \to \tau}\,(\to I)
}\,(\to E)
$$

Эта типизация отражает способность **Y**-комбинатора формировать при редукциях персистентную структуру:

$$\mathbf{Y} \equiv \lambda f.\, \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A} \longrightarrow_\beta \lambda f.\, f\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}) \longrightarrow_\beta \lambda f.\, f\,(f\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A})) \longrightarrow_\beta \ \ldots$$

Здесь $\boldsymbol{A} \equiv \lambda x.\, f\,(x\,x)$. Для $\boldsymbol{\Omega}$ единственная типизация $\boldsymbol{\Omega} : U$.

Конверсия субъекта

Для системы $\lambda_\cap$ выполняется не только теорема о редукции субъекта, но и теорема об экспансии субъекта, которые могут быть объединены в следующую теорему.

Теорема о β-конверсии субъекта

Если $M =_\beta N$, для любых Γ и τ имеет место
$\Gamma \vdash M : \tau \;\Leftrightarrow\; \Gamma \vdash N : \tau$.

Для $\lambda_\to$ это не выполнялось. При эксансии могли случиться:

1. специализация наиболее общего типа (или полная утрата типа) из-за возникновения вхождения фиктивной переменной;
2. возникновение нетипизируемого подтерма из-за унификации двух ранее несвязанных вхождений подтерма;
3. специализация наиболее общего типа из-за унификации двух ранее несвязанных вхождений подтерма.

Экспансия: специализация из-за фиктивной переменной

- В простой системе $\lambda f\, x.\,(\lambda y.\,x)(f\, x) : (\beta \to \gamma) \to \beta \to \beta$.
- После шага редукции терм превращается в $\mathbf{K}_* = \lambda f\, x.\, x$, которому можно приписать тип $\alpha \to \beta \to \beta$.
- В $\lambda_\to$ его нельзя приписать исходному терму.
- В $\lambda_\cap$ такое приписывание возможно:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{f^\alpha, x^\beta, y^U \vdash x : \beta}{f^\alpha, x^\beta \vdash \lambda y.\, x : U \to \beta}\,(\to I) \qquad \dfrac{}{f^\alpha, x^\beta \vdash f\, x : U}\,(\mathsf{Ax}\ U)}{f^\alpha, x^\beta \vdash (\lambda y.\, x)(f\, x) : \beta}\,(\to E)}{f^\alpha \vdash \lambda x.\,(\lambda y.\, x)(f\, x) : \beta \to \beta}\,(\to I)}{\vdash \lambda f\, x.\,(\lambda y.\, x)(f\, x) : \alpha \to \beta \to \beta}\,(\to I)$$

- В простой системе $\omega\,\mathbf{I}$ не имеет типа, но после шага редукции терм превращается в типизируемый $\mathbf{I}\,\mathbf{I} : \alpha \to \alpha$.
- В $\lambda_\cap$ этот тип можно приписать и $\omega\,\mathbf{I}$.
- Для этого мы приписываем $\mathbf{I}$ тип-пересечение (правое поддерево):

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\Gamma \vdash x : \sigma \cap (\sigma \to \sigma)}{\Gamma \vdash x : \sigma \to \sigma}\,(\cap E)
      \qquad
      \dfrac{\Gamma \vdash x : \sigma \cap (\sigma \to \sigma)}{\Gamma \vdash x : \sigma}\,(\cap E)
    }{\Gamma \vdash x\,x : \sigma}\,(\to E)
  }{\vdash \lambda x.\, x\,x : \sigma \cap (\sigma \to \sigma) \to \sigma}\,(\to I)
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{z : \alpha \vdash z : \alpha}{\vdash \lambda z.\, z : \sigma}\,(\to I)
    \qquad
    \dfrac{z : \sigma \vdash z : \sigma}{\vdash \lambda z.\, z : \sigma \to \sigma}\,(\to I)
  }{\vdash \lambda z.\, z : \sigma \cap (\sigma \to \sigma)}\,(\cap I)
}{\vdash (\lambda x.\, x\,x)(\lambda z.\, z) : \sigma}\,(\to E)
$$

Здесь $\sigma \equiv \alpha \to \alpha$, $\Gamma \equiv x^{\sigma \cap (\sigma \to \sigma)}$.

Упражнение.

- Покажите, что в $\lambda_{\to}$ терм $\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,(\mathbf{S}\,\mathbf{I})$ имеет наиболее общий тип $\alpha \to \alpha$.
- Покажите, что в $\lambda_{\to}$ терм $(\lambda x.\,\mathbf{K}\,x\,(\mathbf{S}\,x))\,\mathbf{I}$ имеет наиболее общий тип $(\beta \to \gamma) \to \beta \to \gamma$.
- Покажите, что в $\lambda_{\cap}$ терму $(\lambda x.\,\mathbf{K}\,x\,(\mathbf{S}\,x))\,\mathbf{I}$ можно приписать тип $\alpha \to \alpha$.

Теорема о типах слабо нормализуемых термов

Терм M имеет β-нормальную форму, тогда и только тогда, когда имеются контекст Γ и тип τ, не содержащие $\mathcal{U}$, такие что $\Gamma \vdash M : \tau$.

Например, при нормальной стратегии $\mathbf{Y}\,\mathbf{K}_* \longrightarrow_\beta \mathbf{I}$, при этом $\mathbf{K}_* : \mathcal{U} \to \sigma \to \sigma$, что дает $\mathbf{Y}\,\mathbf{K}_* : \sigma \to \sigma$ и согласуется с типом $\mathbf{I}$.

Экспансия субъекта дает возможность вывода типа нормализацией:

(1) нормализуем; (2) типизируем полученную NF.

Второе разрешимо (и не сложно, см. лабораторку на степике). Первое — неразрешимо (проблема останова).

Типы пересечения и сильная нормализация

Теорема о типах сильно нормализуемых термов (van Bakel)

Терм сильно нормализуем тогда и только тогда, когда можно построить дерево вывода его типа не содержащее $\mathcal{U}$.

- Иными словами: в версии системы $\lambda_{\cap}^{-\mathcal{U}}$ типизируемы все сильно нормализуемые термы и только они.
- Очевидно, что в такой системе задача вывода типа тоже неразрешима.
- В версии системы $\lambda_{\cap}^{-\mathcal{U}}$ экспансия субъекта уже не имеет места.

Имеющие решение (solvable) термы

- Замкнутый терм M называют ***имеющим решение***, если существуют термы $Q_1, \ldots, Q_m$, такие что $M\,Q_1 \ \ldots \ Q_m$ слабо нормализуем.
- Например, хотя $\mathbf{Y}$-комбинатор ненормализуем, он имеет решение: $\mathbf{Y}\,\mathbf{K}_* \ \longrightarrow_\beta \ \mathbf{I}$. С другой стороны очевидно, что $\mathbf{\Omega}$ не имеет решения.
- Терм со свободными переменными называют ***имеющим решение***, если разрешимо его замыкание.

Теорема о характеризации имеющих решение термов

Терм M имеет решение тогда и только тогда, когда есть контекст Γ и тип τ, отличный от $\mathcal{U}$, такие что $\Gamma \vdash M : \tau$.

- Из этой теоремы следует, что, в отличие от $\mathbf{Y}$, комбинатор $\mathbf{\Omega}$ типизируем единственным образом $\mathbf{\Omega} : \mathcal{U}$.

План лекции

Отношение вложения типов $\preccurlyeq$

Отношение $\preccurlyeq$ на типах вводится индуктивно с помощью следующих схем аксиом и правил:

$$
\begin{array}{ll}
(A1) & \sigma \preccurlyeq \sigma \\
(A2) & \sigma \preccurlyeq U \\
(A3) & U \preccurlyeq U \to U \\
(A4) & \sigma \preccurlyeq \sigma \cap \sigma \\
(A5) & \sigma \cap \tau \preccurlyeq \sigma \\
(A6) & \sigma \cap \tau \preccurlyeq \tau \\
(A7) & (\sigma \to \tau_1) \cap (\sigma \to \tau_2) \preccurlyeq \sigma \to \tau_1 \cap \tau_2 \\
 & \\
(R1) & \sigma \preccurlyeq \sigma', \tau \preccurlyeq \tau' \implies \sigma \cap \tau \preccurlyeq \sigma' \cap \tau' \\
(R2) & \sigma \preccurlyeq \sigma', \tau \preccurlyeq \tau' \implies \sigma' \to \tau \preccurlyeq \sigma \to \tau' \\
(R3) & \tau_1 \preccurlyeq \tau_2, \tau_2 \preccurlyeq \tau_3 \implies \tau_1 \preccurlyeq \tau_3
\end{array}
$$

Задача проверки выполнения $\sigma \preccurlyeq \tau$ алгоритмически разрешима.

Альтернативное правило типизации

Правило типизации через вложение

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \qquad \sigma \preccurlyeq \tau}{\Gamma \vdash M : \tau} \qquad (\preccurlyeq)$$

заменяет правило из $\lambda_\cap CD$

$$\frac{\Gamma \vdash \lambda x.\, M\, x : \sigma}{\Gamma \vdash M : \sigma}, \text{ если } x \notin FV(M) \qquad (\eta)$$

Получаем систему $\lambda_\cap BCD$, Барендрегт, Коппо и Дезани, 1982.

Теорема об эквивалентности

Правило типизации (η) может быть заменено на $(\preccurlyeq)$ и наоборот; при этом выводимость утверждения $\Gamma \vdash M : \tau$ сохранится.

Следующие слайды иллюстрируют интересные подслучаи доказательства.

$$\mathsf{U} \preccurlyeq \mathsf{U} \to \mathsf{U}$$

Для этого нужно показать, что любому терму M можно приписать тип $\mathsf{U} \to \mathsf{U}$.

$$\cfrac{\cfrac{\overline{x^{\mathsf{U}} \vdash M\,x : \mathsf{U}}\;(\mathsf{Ax}\ \mathsf{U})}{\vdash \lambda x.\,M\,x : \mathsf{U} \to \mathsf{U}}\;(\to I)}{\vdash M : \mathsf{U} \to \mathsf{U}}\;(\eta)$$

(η)-правило порождает $(A7)$

$$(\sigma \to \tau_1) \cap (\sigma \to \tau_2) \preccurlyeq \sigma \to \tau_1 \cap \tau_2$$

Для этого нужно показать, что терму $M : (\sigma \to \tau_1) \cap (\sigma \to \tau_2)$ можно приписать тип $\sigma \to \tau_1 \cap \tau_2$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash M : \rho}{\Gamma, y^\sigma \vdash M : \rho}\,(\text{Thin})}{\Gamma, y^\sigma \vdash M : \sigma \to \tau_1}\,(\cap E) \quad \Gamma, y^\sigma \vdash y : \sigma}{\Gamma, y^\sigma \vdash M\,y : \tau_1}\,(\to E) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash M : \rho}{\Gamma, y^\sigma \vdash M : \rho}\,(\text{Thin})}{\Gamma, y^\sigma \vdash M : \sigma \to \tau_2}\,(\cap E) \quad \Gamma, y^\sigma \vdash y : \sigma}{\Gamma, y^\sigma \vdash M\,y : \tau_1}\,(\to E)}{\dfrac{\Gamma, y^\sigma \vdash M\,y : \tau_1 \cap \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda y.\,M\,y : \sigma \to \tau_1 \cap \tau_2}\,(\to I)}\,(\cap I)}{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau_1 \cap \tau_2}\,(\eta)$$

Здесь $\rho \equiv (\sigma \to \tau_1) \cap (\sigma \to \tau_2)$, а y свежая для $\Gamma \vdash M : \rho$.

(η)-правило порождает (R2)

$$\sigma \preccurlyeq \sigma', \tau \preccurlyeq \tau' \implies \sigma' \to \tau \preccurlyeq \sigma \to \tau'$$

Для этого нужно показать, что терму $M : \sigma' \to \tau$ можно приписать тип $\sigma \to \tau'$. Доказательство проводится индукцией по структуре типа.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma' \to \tau}{\Gamma, y^\sigma \vdash M : \sigma' \to \tau}\,(\text{Thin}) \qquad \dfrac{\Gamma, y^\sigma \vdash y : \sigma}{\Gamma, y^\sigma \vdash y : \sigma'}\,(\text{IH})}{\Gamma, y^\sigma \vdash M\,y : \tau}\,(\to \mathrm{E})}{\Gamma, y^\sigma \vdash M\,y : \tau'}\,(\text{IH})}{\Gamma \vdash \lambda y.\,M\,y : \sigma \to \tau'}\,(\to \mathrm{I})}{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau'}\,(\eta)$$

Здесь y свежая для вывода $\Gamma \vdash M : \sigma' \to \tau$.

Литература

H. P. Barendregt.
Lambda calculi with types.
In S. Abramsky, Dov M. Gabbay, and S. E. Maibaum, editors, *Handbook of Logic in Computer Science (Vol. 2)*, pages 117–309. Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA, 1992.

Henk Barendregt, Wil Dekkers, and Richard Statman.
Lambda Calculus with Types.
Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2013.

J. Roger Hindley.
Types with intersection: An introduction.
Formal Aspects of Computing, 4(5):470–486, Sep 1992.