Принцип Дирихле и математическая индукция.

1. Сколько чисел нужно выбрать из последовательности
$$\{1, 2, 3, \ldots, 2n\},$$
чтобы среди них гарантированно нашлась хотя бы одна пара чисел, сумма которых была бы равна $2n + 1$?

2. Докажите, что в любой выборке из 52 положительных целых чисел найдутся хотя бы два, у которых либо их сумма, либо их разность делится на 100.

3. В прямоугольнике со сторонами 6×8 сантиметров помещены пять точек. Докажите, что существуют хотя бы две точки, расстояние между которыми меньше или равно пяти сантиметрам.

4. Имеется девять положительных целых чисел, ни одно из которых не имеет простого делителя, большего, чем 5. Докажите, что среди этих чисел найдутся по крайней мере два числа, произведение которых представляет собой квадрат некоторого целого числа.

5. Докажите, что в последовательности чисел 7, 77, 777 $\ldots$ один из первых 2014 членов данной последовательности делится на 2013.

6. Для всех натуральных n докажите: $\frac{(2n)!}{n!^2} > \frac{4^n}{n+1}$

7. Узлы бесконечной клетчатой бумаги покрашены в два цвета. Докажите, что существуют две горизонтальные и две вертикальные прямые, на пересечениях которых лежат точки, покрашенные в один и тот же цвет.

8. Плоскость разрезана на части n прямыми общего положения (никакие две не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке). Доказать, что хотя бы одна из частей – треугольник.

Бонусы:

1. **[2.5 балла]** Докажите, что в произвольном $(n+2)$-м подмножестве множества $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ чисел обязательно найдутся хотя бы два числа, разность которых строго больше n и строго меньше $2n$.

2. **[2 балла]** Футбольная команда за сезон отыграла 30 матчей и забила соперникам в совокупности 53 гола. Известно, что в каждой игре команда забивала хотя бы один гол. Докажите, что существует непрерывная последовательность игр, в течение которой команда забила ровно шесть голов. Останется ли утверждение верным в случае, если команда забъет не 53, а 60 голов?

3. **[1 балл]** Лабиринтом называется клетчатый квадрат 10×10, где между некоторыми парами соседних клеток стоят стенки — таким образом, что переходя из клетки в соседнюю по стороне клетку и не проходя через стены, можно посетить все клетки квадрата. Границу квадрата будем также считать обнесенной стеной. В некоторой клетке некоторого лабиринта стоит робот. Он понимает 4 команды — Л, П, В, Н, по которым соответственно идет влево, вправо, вверх и вниз, а если перед ним «стена», то стоит на месте. Придумайте, как сгенерировать строку из Л, П, В, Н, выполняя которую робот обойдет все клетки независимо от лабиринта и от своего начального положения?