ДЗ2. Комбинаторика. Биномиальные коэффициенты.

1. На глобусе проведены 12 параллелей (окружностей, параллельных экватору) и 24 меридиана (дуги, соединяющие северный полюс с южным). На сколько частей разделена поверхность глобуса?

   Решение:

   Меридианы делят поверхность глобуса на 24 сектора, а параллели делят каждый из секторов на $12+1 = 13$ частей. Согласно правилу произведения, $|X| = |X_1| \cdot |X_2| = 24 \cdot 13 = 312$.

2. Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих равенству
$$x^2 + xy = 30000000.$$

   Решение:

   Перепишем рассматриваемое в задании равенство следующим образом:
$$x \cdot (x + y) = 3 \cdot 2^7 \cdot 5^7.$$
   Заметим, что x является делителем правой части. Любой положительный делитель имеет вид $3^a \cdot 2^b \cdot 5^c$, где $a \in \{0, 1\}$, $b, c \in \{0, \ldots, 7\}$. Всего, таким образом, имеется $2 \cdot 8^2 = 2^7 = 128$ различных положительных делителей и $2 \cdot 128 = 256$ целых делителей. При выбранном x параметр y выбирается однозначно из уравнения $y = 3^{1-a} \cdot 2^{7-b} \cdot 5^{7-c} - x$. Следовательно, всего имеется 256 вариантов.

3. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске белую ладью и черного короля так, чтобы ладья била короля, но король не бил ладью?

   Решение:

   Где бы ни стояла на доске ладья, она держит под боем ровно $7 + 7 = 14$ клеток. Теперь разберемся, где может стоять король. Если король стоит в одном из четырех углов доски, то для ладьи остается $6+6 = 12$ позиций, с которых ладья может побить короля, а король ладью побить не может. Если он стоит в оставшихся 24 клетках на краю доски, для ладьи доступны $5 + 6 = 11$ позиций. Наконец, если он стоит на одной из 36 внутренних клеток доски, то имеется $5+5=10$ возможных позиций для ладьи. В итоге по правилу суммы получаем

$$4 \cdot 12 + 24 \cdot 11 + 36 \cdot 10 = 672$$

возможных позиций для короля и ладьи.

4. Сколько натуральных чисел в диапазоне от 1 до 500 имеют ровно три различных натуральных делителя?

   Решение:

   Ровно три различных натуральных делителя имеют квадраты простых чисел p^2 — их делителями являются числа 1, p и p^2. Заметим, что $23^2 = 529 > 500$, поэтому достаточно рассмотреть квадраты простых чисел от 2 до 19. Таковых имеется 8 штук.

5. Подсчитайте количество различных пар натуральных чисел (x, y), удовлетворяющих равенству

   $$\gcd(x, y) + lcm(x, y) = 113.$$

   Здесь $\gcd(x, y)$ — наибольший общий делитель чисел x и y, то есть наибольшее целое число d, делящее числа x и y, а $lcm(x, y)$ — наименьшее общее кратное чисел x и y, то есть наименьшее натуральное число l, которое делится на x и y без остатка.

   Решение:

   Обозначим через d наибольший общий делитель чисел x и y. Тогда $x = a \cdot d$, $y = b \cdot d$, причем a и b — взаимно-простые числа, то есть такие числа, для которых $\gcd(a, b) = 1$. Действительно, если бы $\gcd(a, b) = c > 1$, то $\gcd(x, y) = c \cdot d$, что противоречит тому, что d — наибольший общий делитель x и y.

   Далее, обозначим через z произвольное (не обязательно наименьшее) общее кратное чисел x и y. Тогда

   $$z = k \cdot x = k \cdot a \cdot d, \qquad z = m \cdot y = m \cdot b \cdot d \qquad \Longrightarrow \qquad k \cdot a = m \cdot b.$$

   Отсюда, в частности, следует, что $k \cdot a$ делится на b. Но a и b — взаимно-просты, так что k делится на b, то есть $k = n \cdot b$. Но тогда

   $$z = k \cdot x = n \cdot b \cdot x = n \cdot b \cdot a \cdot d.$$

   Отсюда видно, что наименьшее общее кратное при заданных a, b и d получается при $n = 1$:

   $$lcm(x, y) = a \cdot b \cdot d = a \cdot b \cdot \gcd(x, y).$$

Возвращаемся к нашей задаче. С учетом вышесказанного мы получаем, что

$$\gcd(x, y) + lcm(x, y) = \gcd(x, y) \cdot (1 + a \cdot b) = 113,$$

то есть что 113 делится на число $1 + a \cdot b > 1$. Но 113 является простым числом, поэтому

$$1 + a \cdot b = 113 \qquad \Longrightarrow \qquad a \cdot b = 112.$$

Иными словами, мы свели задачу к более простой: сколько пар взаимно-простых натуральных чисел (a, b) удовлетворяет равенству $a \cdot b = 112$, или, по-другому, сколько у числа 112 имеется различных делителей a. А эту задачу мы уже решать умеем: раскладывая 112 на простые множители, мы получаем

$$112 = 2^4 \cdot 7^1.$$

Следовательно, имеется 4 пары (x, y), таких, что

$$\gcd(x, y) + lcm(x, y) = 113.$$

6. Дайте комбинаторное доказательство равенства

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} \binom{n}{m} = \binom{n}{k} 2^{n-k}.$$

Решение:

Воспользуемся принципом double counting. В правой части равенства мы подсчитываем количество способов проделать следующие комбинаторные действия: выбрать $\binom{n}{k}$ способами k-элементное подмножество n-элементного множества X, а затем в оставшемся $(n-k)$-элементном множестве выбрать подмножество произвольного размера. Левая часть доказываемого равенства подсчитывает то же количество, но другим способом. Именно, мы фиксируем произвольное m, $m \in [k, n]$, затем $\binom{n}{m}$ количеством способов выбираем в X m-элементное подмножество Y, а затем $\binom{m}{k}$ способами выбираем в нем k-элементное подмножество. Одновременно с этим мы выбираем в X и некоторое подмножество размера $m - k$. Перебирая все m из диапазона $[k, n]$, мы перебираем все подмножества $(n-k)$-элементного множества вместе с выбором подмножества размера k множества X.

7. Докажите комбинаторно так называемую формулу суммирования по диагонали
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}=\binom{m+n+1}{n}. \tag{1}$$

Решение:

Для доказательства этой формулы разобъем все множество n-элементных подмножеств $(n+m+1)$-элементного множества на блоки следующим образом. В первый блок включим подмножества, не содержащие элемент x_1. Количество таких подмножеств, очевидно, равно $\binom{n+m}{n}$. Во второй блок включим подмножества, содержащие x_1, но не содержащие x_2. Таковых имеется $\binom{n+m-1}{n-1}$ штук. В третий — подмножества, содержащие x_1 и x_2, но не содержащие x_3, и так далее. Наконец, в последний, $(n+1)$-й блок, мы включим подмножество $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Складывая количество элементов в каждом блоке, мы и получим формулу суммирования по диагонали (1).

8. Дайте комбинаторное доказательство тождества
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}.$$

Решение:

Рассмотрим множество мощности $2n$, состоящее из чисел $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$. Правая часть доказываемого равенства подсчитывает все подмножества мощности n этого множества. Левая часть подсчитывает то же самое количество, но следующим образом: вначале фиксируется произвольное k, $0 \le k \le n$, затем $\binom{n}{k}$ способами выбирается k положительных чисел, и одновременно с этим $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ выбирается $n-k$ отрицательных чисел.

9. Сколько существует бинарных (т.е. состоящих из цифр 0 и 1) строк длины n, содержащих k единиц? А бинарных строк длины n, содержащих k единиц и таких, в которых никакие две единицы не стоят рядом?

Решение:

Любая бинарная строка длины n задает нам некоторое подмножество множества X мощности $|X| = n$ с помощью следующего алгоритма: если на i-м месте строки у нас стоит единица, мы добавляем элемент x_i в подмножество, а если там стоит ноль, то элемент x_i в подмножество не добавляем. Ясно, что такой алгоритм задает биекцию между множеством всех бинарных строк длины n и множеством всех подмножеств n-множества X. Поэтому количество бинарных строк, содержащих k единиц, совпадает с количеством всех k-элементных подмножеств множества X и равно $\binom{n}{k}$.

Для ответа на второй вопрос рассмотрим произвольную строку из нулей и единиц требуемого вида, и после каждой из первых $(k-1)$-й единиц удалим стоящий справа от единицы ноль. В результате мы получим обычную строку из нулей и единиц длины $n-k+1$. Количество таких строк равно $\binom{n-k+1}{k}$.