Заметки к курсу „Теория информации“. Лекции 1-6

А. Смаль

9 февраля 2020 г.

Аннотация

Курс посвящён изучению подходов к определению понятия „количество информации“. Последовательность изложения материала данного курса основана на классической статье Колмогорова „Три подхода к определению понятия количества информации“ (1965).

В курсе будет рассмотрено три подхода к определению „количества информации“: комбинаторный (информация по Хартли), вероятностный (энтропия Шеннона) и алгоритмический (Колмогоровская сложность). Кроме этого мы поговорим про различные применения аппарата теории информации в различных областях компьютерных наук: в криптографии, в коммуникационной сложности, в теории кодирования, в теории конечных автоматов, в теории сложности вычислений и некоторых других.

Содержание

1. Комбинаторный подход

1.1. Информация по Хартли

Пусть задано некоторое конечное множество A — *множество исходов*.

Определение 1.1 (1928)**.** Определим *количество информации в* A как $\chi(A) = \log_2 |A|$ (мы будем измерять количество информации в битах, поэтому все логарифмы будут по основанию 2, для измерения в байтах нужно выбрать основание 256).

Если про некоторый $x \in A$ стало известно, что $x \in B$, то теперь для идентификации x нам достаточно $\chi(A \cap B) = \log |A \cap B|$ битов, т.е. нам сообщили $\chi(A) - \chi(A \cap B)$ битов информации.

Пример 1.1. Предположим, что мы хотим узнать некоторое неизвестное упорядочение множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_5\}$. Нам стало известно, что $a_1 > a_2$ или $a_3 > a_4$. Сколько битов информации мы узнали? Множество A состоит из 5! перестановок, множество B — из перестановок, которые удовлетворяют новому условию. Легко проверить, что $|B| = 90$. Итого мы узнали $\log 120 - \log 90 = \log(4/3)$ битов.

Пусть $A \subset \{0,1\}^* \times \{0,1\}^*$. Обозначим через $\pi_1(A)$ и $\pi_2(A)$ проекции множества A на первую и вторую координату соответственно, а $\chi_1(A) = \log |\pi_1(A)|$ и $\chi_2(A) = \log |\pi_2(A)|$ — количество информации в них по Хартли.

Теорема 1.1. $\chi(A) \leq \chi_1(A) + \chi_2(A)$.

Определение 1.2. Количество информации в второй координате $A \subset \{0,1\}^* \times \{0,1\}^*$ при известной первой

$$\chi_{2|1} = \log \left(\max_{a \in \pi_1(A)} \left| \{x \mid (a,x) \in A\} \right| \right).$$

Теорема 1.2. $\chi(A) \leq \chi_1(A) + \chi_{2|1}(A)$.

Теорема 1.3. *Для* $A \subset \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \times \{0,1\}^*$

$$2 \cdot \chi(A) \leq \chi_{12}(A) + \chi_{13}(A) + \chi_{23}(A).$$

Следствие 1.1. *Квадрат объёма трёхмерного тела не превосходит произведение площадей его проекций на координатные плоскости.*

Утверждение 1.1. *Если* $f : X \to Y$

1. *является сюръекцией, то* $\chi(Y) \leq \chi(X)$,
2. *является инъекцией, то* $\chi(X) \leq \chi(Y)$.

1.2. Применение: игра в 10 вопросов

Сколько вопросов на ДА/НЕТ нужно задать, чтобы определить загаданное число от 1 до N, если (а) можно задавать вопросы адаптивно; (б) вопросы нужно написать на бумажке заранее.

Оценка $\lceil \log N \rceil$ достигается в обоих случаях, если задавать вопросы про биты двоичного представления загаданного числа.

Докажем нижнюю оценку. Пусть $A = [N]$. Множество $Q = \{(q_1, q_2, \ldots, q_k)\}$ — множество протоколов (ответы на вопросы). Можно рассматривать A и Q как проекции некоторого множества исходов игры S на разные координаты. Тогда верны следующие неравенства:

- $\chi_Q(S) = \chi(Q) \le \chi_1(Q) + \chi_2(Q) + \cdots + \chi_k(Q) \le k$,
- $\chi_A(S) = \chi(A) \le \chi(S) \le \chi_Q(S) + \chi_{A|Q}(S) \le k + 0 = k$.

Таким образом получаем, что $\log N = \chi(A) \le k$.

1.3. Цена информации

Пусть загадано некоторое целое число от 1 до n (где $n \ge 2$). Разрешается задавать любые вопросы с ответами ДА/НЕТ. При ответе ДА мы заплатим 1 рубль, а при ответе НЕТ — два рубля. Сколько необходимо и достаточно заплатить для отгадывания числа?

Верхняя оценка. Будем задавать вопросы так, чтобы отрицательные ответы приносили в два раза больше информации, чем положительные. Тогда за каждый бит информации мы заплатим некоторое константное количество рублей c. Пусть все вопросы будут вида „$x \in T$?“. Потребуем, чтобы

$$2 \cdot (\log |X| - \log |X \cap T|) = \log |X| - \log |X \cap \overline{T}|.$$

Пусть $|X \cap T| = \alpha |X|$, тогда $|X \cap \overline{T}| = (1-\alpha)|X|$, таким образом получается уравнение

$$2 \log(1/\alpha) = \log(1/(1-\alpha)),$$

эквивалентное квадратному уравнению

$$\alpha^2 = 1 - \alpha.$$

Из двух корней нас интересует тот, что меньше 1, т.е. $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$. Следовательно при любом ответе мы заплатим $c = 1/(-\log \alpha) \approx 1.44$ рублей за бит, а в целом — $c \log n$ рублей.

В этой оценке мы полностью проигнорировали вопросы округления. Действительно, у нас никогда получится разделить множество из n элементов на два в отношении

$\alpha : (1-\alpha)$, т.к. α — иррациональное. Поэтому на каждом вопросе будет накапливаться некоторая ошибка округления. Давайте вместо вопросов принадлежности некоторому подмножеству T множества X будем задавать вопрос о принадлежности отрезку с вещественными координатами. Начнём с отрезок $S = [1, n]$ и будем каждый раз уменьшать его в $1/\alpha$ раз, т.е. первым вопросом спросим, принадлежит ли x отрезку $S' = [1, 1 + \alpha(n-1)]$. Длина отрезка S' в $1/\alpha$ раз меньше длины отрезка S. Продолжим действовать так же до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 1 — в этом случае x определено однозначно. После каждого вопроса длина отрезка уменьшается максимум в $1/(1-\alpha) = 1/\alpha^2$, поэтому длина последнего отрезка не меньше α^2. Таким образом длина отрезка сократится не более, чем в $(n-1)/\alpha^2$ раз. Поскольку мы каждый раз выбирали отрезки так, чтобы платить c рублей за уменьшение $\log|S|$ на 1, то в сумме заплатим не более

$$c\log((n-1)/\alpha^2) = c\log(n-1) - 2c\log\alpha = c\log(n-1) + 2.$$

При любом исходе мы заплатим целое число рублей, поэтому эту оценку можно уточнить до $\lfloor c\log(n-1)\rfloor + 2$.

Нижняя оценка. Применим рассуждение про злонамеренного противника (adversary argument). Пусть противник выбирает ответ ДА/НЕТ в зависимости от того, какое из двух значений $1/(\log|X| - \log|X\cap T|)$ и $2/(\log|X| - \log|X\cap\overline{T}|)$ больше. При любых X, T одно из этих значений не меньше $c = 1/(-\log\alpha)$. Таким образом мы заставляем алгоритм платить не менее c рублей за бит, а значит любой алгоритм в худшем случае заплатит $\lceil c\log n\rceil$ рублей.

2. Вероятностный подход

2.1. Энтропия Ше́ннона

Энтропия Шеннона определяет количество информации $H(\alpha)$ в распределении вероятностей для некоторой случайной величины α. Пусть α принимает значения из множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ с вероятностями $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$, $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$.

Нам бы хотелось, чтобы это определение согласовывалось с определением Хартли, т.е. имеют место следующие „граничные условия“:

- если $p_1 = \cdots = p_k$, то $H(\alpha) = \log k$,
- если $p_1 = 1$, $p_2 = \cdots = p_k = 0$, то $H(\alpha) = 0$.

Будем искать $H(\alpha)$ в виде математического ожидания информации, которую мы получаем от каждого исхода.

$$H(\alpha) = \sum_i p_i \cdot (\text{информация в } a_i).$$

Как оценить, сколько информации в исходе a_i? Пусть U — всё пространство элементарных исходов, все исходы которого равновероятны. Тогда событию $\alpha = a_i$ соответствует множеству элементарных исходов меры p_i. Соответственно, если случилось событие $\alpha = a_i$, то размер множества согласованных с этим событием исходов уменьшается с $|U|$ до $p_i|U|$, т.е. событие $\alpha = a_i$ сообщает нам $\log|U| - \log(p_i|U|) = \log\frac{1}{p_i}$ битов информации. Пусть теперь элементарные исходы не равновероятны. В этом случае событие $\alpha = a_i$ сообщает нам информацию, которая уменьшает *меру* множества возможных исходов в $1/p_i$ раз, т.е. опять получаем $\log 1 - \log p_i = \log\frac{1}{p_i}$. Это приводит нас к следующему определению.

Определение 2.1 (1948)**.** Энтропия Шеннона случайной величины α

$$H(\alpha) = \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot \log\frac{1}{p_i}.$$

(По непрерывности доопределим $0 \cdot \log\frac{1}{0} = 0$.)

Можно вывести это соотношение из определения информации по Хартли другим способом. Пусть W_n — это множество всех слов длины n состоящих из букв $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, где каждая буква a_i встречается ровно $n_i = p_i \cdot n$ раз (будем считать, что вероятности p_i рациональны, и что множество W_n определено только тогда, когда все n_i целые). Информация по Хартли в W_n

$$\chi(W_n) = \log|W_n| = \log\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Это выражение можно оценить при помощи формулы Стирлинга.

$$\begin{aligned}
\chi(W_n) &= \log\frac{\mathrm{poly}(n)\cdot(n/e)^n}{\mathrm{poly}(n)\cdot(n_1/e)^{n_1}\cdot(n_1/e)^{n_2}\cdots(n_k/e)^{n_k}} = \\
&= \log\left(\left(\frac{n}{n_1}\right)^{n_1}\cdot\left(\frac{n}{n_2}\right)^{n_2}\cdots\left(\frac{n}{n_k}\right)^{n_k}\right) + O(\log n) = \\
&= \log\left(\left(\frac{1}{p_1}\right)^{p_1\cdot n}\cdot\left(\frac{1}{p_2}\right)^{p_2\cdot n}\cdots\left(\frac{1}{p_k}\right)^{p_k\cdot n}\right) + O(\log n) = \\
&= n\cdot\sum_{i=1}^{k} p_i\cdot\log\frac{1}{p_i} + O(\log n).
\end{aligned}$$

В среднем на один символ приходится $\chi(W_n)/n$ битов информации. В пределе получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\chi(W_n)}{n} = \sum_{i=1}^{k} p_i\cdot\log\frac{1}{p_i} = H(\alpha)$$

(предел нужно брать по бесконечной подпоследовательности натуральных чисел n таких, для которых все $\{n_i\}$ — целые).

Лемма 2.1. *Для энтропии Шеннона выполняются следующие соотношения.*

- $H(\alpha) \geq 0$, *причём* $H(\alpha) = 0 \iff$ *распределение* α *вырождено.*
- $H(\alpha) \leq \log k$, *причём* $H(\alpha) = \log k \iff$ *величина* α *распределена равномерно.*

Для доказательства нам потребуется следующая теорема.

Теорема 2.1 (Неравенство Йенсена)**.** *Пусть функция* $f(x)$ *является вогнутой на некотором промежутке* $\mathcal{X}$ *и числа* $q_1, q_2, \ldots, q_n > 0$ *таковы, что* $q_1 + \cdots + q_n = 1$. *Тогда для любых* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *из промежутка* $\mathcal{X}$ *выполняется неравенство:*

$$\sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right).$$

Доказательство леммы 2.1. Первое свойство следует напрямую из определения: каждый член суммы $H(\alpha)$ неотрицателен и равен нулю только в случае, если $p_i = 0$ или $p_i = 1$.

Для доказательства второго неравенства перенесём всё в левую часть и применим неравенство Йенсена:

$$H(\alpha) - \log k = \sum_{i=1}^{k} p_k \cdot \log \frac{1}{p_i} - \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot \log k = \sum_{i=1}^{k} p_k \cdot \log \frac{1}{p_i k} \leq \log\left(\sum_{i=1}^{k} p_i \frac{1}{p_i k}\right) = \log 1 = 0.$$

□

Энтропию совместного распределения пары случайных величин α и β будем обозначать $H(\alpha, \beta)$.

Лемма 2.2. *Выполняются следующие свойства:*

- $H(\alpha, \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$, *причём равенство достигается тогда и только тогда, когда случайные величины независимы;*
- $H(\alpha) \leq H(\alpha, \beta)$, *причём равенство достигается тогда и только тогда, когда* β *полностью определяется значением* α, *т.е.* $\beta = f(\alpha)$.

Доказательство. Введём обозначения для вероятностей событий совместного распределения вероятностей (α, β). Пусть пара (a_i, b_j) имеет вероятность $p_{i,j}$, событие $[\alpha = a_i]$ имеет вероятность $p_{i,*} = p_{i,1} + \cdots + p_{i,n}$, а событие $[\beta = b_j]$ — вероятность $p_{*,j} = p_{1,j} + \cdots + p_{k,j}$. В этих обозначениях неравенство $H(\alpha, \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$ переписывается как

$$\sum_{i,j} p_{i,j} \cdot \log \frac{1}{p_{i,j}} \leq \sum_{i} \sum_{j} p_{i,j} \cdot \log \frac{1}{p_{i,*}} + \sum_{j} \sum_{i} p_{i,j} \cdot \log \frac{1}{p_{*,j}}.$$

Перенесём всё в левую часть и применим неравенство Йенсена.

$$\sum_{i,j} p_{i,j} \cdot \log \frac{p_{i,*} \cdot p_{*,j}}{p_{i,j}} \leq \log \left(\sum_{i,j} p_{i,j} \cdot \frac{p_{i,*} \cdot p_{*,j}}{p_{i,j}} \right) = \log \left(\sum_{i,j} p_{i,*} \cdot p_{*,j} \right) =$$

$$= \log \left(\left(\underbrace{\sum_{i} p_{i,*}}_{1} \right) \cdot \left(\underbrace{\sum_{j} p_{*,j}}_{1} \right) \right) = 0.$$

Равенство в неравенстве Йенсена для $f(x) = \log(x)$ достигается только, если все точки равны, т.е. для любых i, j $\frac{p_{i,*}p_{*,j}}{p_{i,j}} = c$ для некоторой константы c. Несложно заметить, что $c = 1$, т.к. выполняется следующее равенство $\sum_{i,j} p_{i,*}p_{*,j} = c \sum_{i,j} p_{i,j}$ в котором обе суммы равны 1. Таким образом в случае равенства α и β независимы.

Доказательство второго свойства мы получим как следствие из свойств условной энтропии. □

Определение 2.2. Энтропия α при условии $\beta = b_j$

$$H(\alpha \mid \beta = b_j) = \sum_i \Pr[\alpha = a_i \mid \beta = b_j] \cdot \log \frac{1}{\Pr[\alpha = a_i \mid \beta = b_j]}.$$

Определение 2.3. *Условная (относительная) энтропия* α относительно β

$$H(\alpha \mid \beta) = \sum_j \Pr[\beta = b_j] \cdot H(\alpha \mid \beta = b_j).$$

Другими словами

$$H(\alpha \mid \beta) = \mathop{\mathrm{E}}_{b_j \leftarrow \beta}[H(\alpha \mid \beta = b_j)].$$

Если подставить определение 2.2, то можно получить выражение для условной энтропии через отдельные вероятности событий.

$$H(\alpha \mid \beta) = \sum_j \Pr[\beta = b_j] \cdot \sum_i \Pr[\alpha = a_i \mid \beta = b_j] \cdot \log \frac{1}{\Pr[\alpha = a_i \mid \beta = b_j]} = \sum_{i,j} p_{i,j} \cdot \log \frac{p_{*,j}}{p_{i,j}}.$$

Лемма 2.3. *Условная энтропия обладает следующими свойствами.*

- $H(\alpha \mid \beta) \geq 0$.
- $H(\alpha \mid \beta) = 0 \iff$ *α однозначно определяется по β.*
- $H(\alpha, \beta) = H(\beta) + H(\alpha \mid \beta) = H(\alpha) + H(\beta \mid \alpha)$.

Доказательство. Первое свойство выполняется, т.к. условная энтропия это матожидание неотрицательной случайной величины. Второе свойство объясняется тем, что для любого j распределение $\langle \alpha \mid \beta = b_j \rangle$ имеет нулевую энтропию, т.е. распределение вырождено и каждому b_j соответствует ровно один a_i. Третье свойство следует из следующего равенства.

$$\sum_{i,j} p_{i,j} \cdot \log \frac{1}{p_{i,j}} = \sum_{i,j} p_{i,j} \cdot \log \frac{1}{p_{*,j}} + \sum_{i,j} p_{i,j} \cdot \log \frac{p_{*,j}}{p_{i,j}}.$$

(Нужна аккуратность, если есть строки, которые состоят из одних нулей, т.е $p_{*,j} = 0$ — такие строки не нужно включать в эти суммы.) □

Следствие 2.1. *$H(\alpha, \beta) \geq H(\alpha)$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $\beta = f(\alpha)$.*

Доказательство. $H(\alpha, \beta) - H(\alpha) = H(\beta \mid \alpha) \geq 0$. По второму свойству условной энтропии равенство достигается тогда и только тогда, когда $\beta = f(\alpha)$. □

2.2. Взаимная информация

Определение 2.4. *Информация в α о величине β* определяется следующим соотношением:

$$I(\alpha : \beta) = H(\beta) - H(\beta \mid \alpha).$$

Эту величину так же *называют взаимной информацией случайных величин α и β.*

Лемма 2.4. *Для взаимной информации выполняются следующие соотношения.*

1. $I(\alpha : \beta) \leq H(\alpha)$.
2. $I(\alpha : \beta) \leq H(\beta)$.
3. $I(\alpha : \alpha) = H(\alpha)$.
4. $I(\alpha : \beta) = I(\beta : \alpha)$.
5. $I(\alpha : \beta) = H(\alpha) + H(\beta) - H(\alpha, \beta)$.

Определение 2.5. Пусть α, β, γ — случайные величины. Определим *взаимную информацию в α о β при условии γ.*

1. $I(\alpha : \beta \mid \gamma) = H(\beta \mid \gamma) - H(\beta \mid \alpha, \gamma)$.
2. $I(\alpha : \beta \mid \gamma) = \sum_\ell I(\alpha : \beta \mid \gamma = c_\ell) \cdot \Pr[\gamma = c_\ell]$.
3. $I(\alpha : \beta \mid \gamma) = H(\alpha \mid \gamma) + H(\beta \mid \gamma) - H(\alpha, \beta \mid \gamma)$.
4. $I(\alpha : \beta \mid \gamma) = H(\alpha, \gamma) + H(\beta, \gamma) - H(\alpha, \beta, \gamma) - H(\gamma)$.

Лемма 2.5. *Все определения условной взаимной информации эквивалентны.*

Доказательство. (3) $\iff$ (4).

$(3) = H(\alpha \mid \gamma)+H(\beta \mid \gamma)-H(\alpha,\beta \mid \gamma) = H(\alpha,\gamma)-H(\gamma)+H(\beta,\gamma)-H(\gamma)-H(\alpha,\beta,\gamma)+H(\gamma).$

□

Утверждение 2.1 (chain rule for mutual information)**.** *Имеют место следующие соотношения:*

1. $I((\alpha,\beta):\gamma) = I(\alpha:\gamma) + I(\beta:\gamma \mid \alpha)$.
2. $I((\alpha,\beta):\gamma \mid \delta) = I(\alpha:\gamma \mid \delta) + I(\beta:\gamma \mid \alpha,\delta)$.

3. Кодирование

3.1. Однозначно декодируемые коды

Определение 3.1. Будем называть *кодом* функцию $C : \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \to \{0,1\}^*$, сопоставляющую буквам некоторого алфавита *кодовые слова*. Если любое сообщение, которое получено применением кода C, декодируется однозначно (т.е. только единственным образом разрезается на образы C), то такой код называется *однозначно декодируемым*.

Определение 3.2. Код называется *префиксным (беспрефиксным, prefix-free)*, если никакое кодовое слово не является префиксом другого кодового слова.

Теорема 3.1 (Неравенство Крафта-Макмилана)**.** *Для любого однозначно декодируемого кода со множеством кодовых слов $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ выполняется следующее неравенство:*

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-|c_i|} \leq 1.$$

Лемма 3.1. *Для префиксных кодов верно неравенство Крафта-Макмилана.*

Доказательство. Рассмотрим дерево префиксного кода и посчитаем суммарную меру поддеревьев, которые соответствуют кодовым словам. □

Утверждение 3.1. *Для префиксных кодов верно и обратное: если есть набор целых чисел $\{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n\}$, удовлетворяющие неравенству Крафта-Макмилана*

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-\ell_i} \leq 1,$$

то существует префиксный код с кодовыми словами $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, где $|c_i| = \ell_i$.

Доказательство. Отсортируем ℓ_i по возрастанию и будем развешивать их в бесконечном двоичном дереве, выбирая каждый раз самый левый свободный узел соответствующей меры. Можно заметить, что мы всегда сможем найти такой узел. □

Следствие 3.1. *Для любого однозначно декодируемого кода существует префиксный код с теми же длинами кодовых слов.*

Доказательства теоремы 3.1. Сопоставим кодовым словам $\{c_i\}$ мономы $\{p_i\}$ от переменных x и y таким образом, что каждый '0' в кодовом слове соответствует x, а каждая '1' — y:

$$c_i = 0110101 \implies p_i(x,y) = xyyxyxy.$$

Рассмотрим следующее выражение для некоторого L.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i(x,y)\right)^L = \sum_{\ell=L}^{\max|c_i|\cdot L} M_\ell(x,y),$$

где M_ℓ обозначает сумму всех получившихся мономов степени ℓ. Заметим, что в каждом M_ℓ не более 2^ℓ мономов: в противном случае код не был бы однозначно декодируемым — каждый моном (без учёта коммутативности и ассоциативности) мог получиться не более одного раза.

Теперь рассмотрим значение этого выражения при $x = y = \frac{1}{2}$.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)\right)^L = \sum_{\ell=L}^{\max|c_i|\cdot L} M_\ell\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) \le \sum_{\ell=L}^{\max|c_i|\cdot L} (2^{-\ell}\cdot 2^\ell) \le L\cdot\max|c_i| = O(L). \qquad (1)$$

Предположим теперь, что неравенство Крафта-Макмилана не выполняется, т.е.

$$q = \sum_{i=1}^{n} p_i(1/2,1/2) = \sum_{i=1}^{n} 2^{-|c_i|} > 1.$$

Сравнивая это с (1) получаем противоречие: $q^L = O(L)$ (левая часть растёт экспоненциально, а правая — линейно). □

Пусть для каждого символа алфавита задана вероятность p_i. Нас будут интересовать самые короткие в среднем коды, т.е. такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot|c_i| \to \min.$$

Теорема 3.2 (Шеннон)**.** *Для любого однозначно декодируемого кода выполняется*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot|c_i| \ge \sum_{i=1}^{n} p_i\cdot\log\frac{1}{p_i}.$$

Доказательство. Перенесём всё в правую часть и применим неравенство Йенсена:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot\log\frac{2^{-|c_i|}}{p_i} \le \log\sum_{i=1}^{n}\left(p_i\frac{2^{-|c_i|}}{p_i}\right) = \log\sum_{i=1}^{n} 2^{-|c_i|} \le \log 1 = 0.$$

□

Теорема 3.3 (Шеннон)**.** *Для любого распределения вероятностей* $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ *существует однозначно декодируемый/префиксный код* $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$*, такой что*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot |c_i| \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log \frac{1}{p_i} + 1.$$

Замечание 3.1. От '+1' в правой части никак не избавиться: например, если у нас только два символа в алфавите, то $\sum p_i \cdot |c_i| = 1$, в то время как $\sum p_i \log \frac{1}{p_i}$ может быть сколько угодно близко к нулю.

Доказательство. Покажем, что найдутся $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ такие, что $|c_i| = \left\lceil \log \frac{1}{p_i} \right\rceil$. Код существует, т.к. для длин c_i выполняется неравенство Крафта-Макмилана:

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-|c_i|} = \sum_{i=1}^{n} 2^{-\left\lceil \log \frac{1}{p_i} \right\rceil} \leq \sum_{i=1}^{n} 2^{-\log \frac{1}{p_i}} = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Теперь оценим среднюю длину кода:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot |c_i| = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left\lceil \log \tfrac{1}{p_i} \right\rceil < \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left(\log \tfrac{1}{p_i} + 1 \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log \tfrac{1}{p_i} \right) + 1.$$

□

3.2. Код Шеннона-Фано

Упорядочим вероятности символов по убыванию: $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n$. Уложим на прямой без пропусков отрезки длиной p_1, p_2,..., p_n и обозначим i-ый отрезок через S_i, а их объединение — через S. Коды тех букв a_i, для которых отрезок S_i попал в левую половину S, будут начинаться с '0', а коды тех букв, для которых отрезок S_i попал в правую часть S — с '1'. Центральный отрезок может не попасть целиком в одну из половин S. Если центральный отрезок является первым или последним, то начнём его код, соответственно, с '0' или '1'. В противном случае отнесём его в произвольную половину S. Далее применяем эту стратегию отдельно для букв из левой половины S и отдельно для правой половины S. Повторяем так пока не получим уникальные коды для всех символов.

Определение 3.3. Будем называть кодирование, при котором для некоторой константы c и для всех i выполняется $|c_i| \leq -\log p_i + c$, *сбалансированным.*

Теорема 3.4 (Шеннон)**.** *Средняя длина кода Шеннона-Фано близка к энтропии, но не обязательно оптимальна:*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot |c_i| = H + O(1).$$

3.3. Код Хаффмана

Определение 3.4. Будем строить *код Хаффмана* по индукции. При $n = 2$ коды $c_1 = \langle 0 \rangle$, $c_2 = \langle 1 \rangle$. При $n > 2$ будем предполагать, что вероятности упорядочены по убыванию $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n$. Заменим символы a_{n-1} и a_n на символ a'_{n-1} с вероятностью $p'_{n-1} = p_{n-1} + p_n$. Построим код Хаффмана для $n-1$ символа. Для символов a_{n-1} и a_n возьмём коды $c_{n-1} = c'_{n-1}0$ и $c_n = c'_{n-1}1$.

Лемма 3.2. *Средняя длина кодового слова для кода Хаффмана оптимальна, т.е. не превосходит средней длины любого другого префиксного кода (а значит и любого однозначно декодируемого).*

Следствие 3.2. *Для кода Хаффмана выполняется неравенство из теоремы Шеннона 3.3.*

Замечание 3.2. На энтропию случайной величины иногда удобно смотреть как на среднюю длину кода Хаффмена.

3.4. Арифметическое кодирование

Мы построим код со следующим ограничением на среднюю длину:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot |c_i| \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log \frac{1}{p_i} + 2,$$

что хуже, чем в теореме Шеннона.

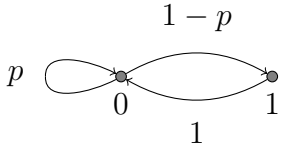
Определение 3.5. Будем называть полуинтервал *стандартным*, если он имеет вид $[0.v0_2, 0.v1_2)$, где v — это некоторая последовательность битов, а числа записаны в двоичной системе счисления. Будем сопоставлять каждому стандартному интервалу $[0.v0_2, 0.v1_2)$ код $v0$.

Для первой буквы кода на отрезке [0,1] мы отложим слева направо непересекающиеся интервалы длины p_i. Пусть первая буква блока — это a_{i_1}, тогда для второй буквы кода мы внутри интервала соответствующего p_{i_j} повторим эту операцию (отложим непересекающиеся интервалы), но длины интервалов будут уже масштабированы с коэффициентом p_i. Повторим эту операцию k раз. Получившемуся интервалу в качестве его кода сопоставим код наибольшего стандартного интервала, который полностью содержится внутри него.

Утверждение 3.2. *В интервале $[a, b)$ всегда найдётся стандартный интервал длины 2^{-k}, где $\frac{b-a}{4} < 2^{-k} \leq \frac{b-a}{2}$, т.е. длина кода любого интервала при арифметическом кодировании не превосходит $\log \frac{4}{b-a} = \log \frac{1}{p} + 2$, где p — вероятность соответствующего блока.*

Замечание 3.3. В случае Марковской цепи можно строить код с соответствующими условными вероятностями.

Упражнение 3.1. Пусть Марковская цепь задана графом.



Определим $h_p = \lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}{n}$. Найти $\max\limits_p h_p$.

3.5. Блоковые коды с ошибками

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — независимые одинаково распределённые на $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ случайные величины с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Рассмотрим блоковое кодирование, заданное функциями E_n и D_n:

$$E_n : \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}^n \to \{0,1\}^{L_n},$$

$$D_n : \{0,1\}^{L_n} \to \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}^n,$$

Определение 3.6. *Вероятность ошибки* ε_n — это вероятность следующего события: $[(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}) \mid D_n(E_n(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})) \neq (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})]$.

Теорема 3.5 (Шеннон)**.** *При блоковом кодировании допускающем ошибки выполняются следующие соотношения.*

1. *Если* $h > H(\alpha) = \sum_{i=1}^k p_i \log \frac{1}{p_i}$, *то существует функции* (E_n, D_n) *для* $L_n = \lceil h \cdot n \rceil$, *такие что* $\varepsilon_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.
2. *Если* $h < H(\alpha) = \sum_{i=1}^k p_i \log \frac{1}{p_i}$, *то для любых функций* (E_n, D_n) *для* $L_n = \lceil h \cdot n \rceil$ *вероятность ошибки* $\varepsilon_n \to 1$ *при* $n \to \infty$.

Определение 3.7. Будем называть слово $w = \langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n} \rangle$ δ-*типичным*, если каждая буква a_j встречается в нём t_j раз, причём

$$\begin{cases} t_j \leq (p_j + \delta) \cdot n, \\ t_j \geq (p_j - \delta) \cdot n. \end{cases}$$

Лемма 3.3. *Для* $\delta = n^{-0.49} = \frac{n^{0.01}}{\sqrt{n}}$ *вероятность не* δ*-типичного не превосходит* ε_n, *для* $\varepsilon_n \to 0$.

Доказательство. Применить неравенство Чебышева

$$\mathrm{P}[|X - \mu| \geq \delta n] \leq \frac{\sigma^2}{(\delta n)^2} = \frac{np_i(1-p_i)}{\delta^2 n^2} = O(n^{-0.02}).$$

□

Лемма 3.4. *Для $\delta = n^{-0.49}$ количество δ-типичных слов не превосходит $2^{h\cdot n}$ (при достаточно больших n).*

Доказательство. Давайте для начала рассмотрим слова определённого *типа*, в которых буква i встречается n_i раз, $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Сначала оценим количество слов типа, в котором $n_i = n \cdot p_i$. Таких слов

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

По формуле Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (1 + o(1))$.

$$\log \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} \approx \log \frac{\mathrm{poly}(n)\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\mathrm{poly}(n)\left(\frac{n_1}{e}\right)^{n_1} \cdots \left(\frac{n_k}{e}\right)^{n_k}} =$$

$$= \log \left(\frac{n}{n_1}\right)^{n_1} \cdots \left(\frac{n}{n_k}\right)^{n_k} + O(\log n) = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{np_i}_{n_i} \cdot \log \tfrac{1}{p_i} + O(\log n) < h \cdot n. \quad (2)$$

Последнее неравенство выполняется асимптотически, т.к. по предположению $h > H(\alpha)$. Мы оценили это только для конкретного типа слов. Давайте оценим для произвольного δ-типичного слова с $n_i = n \cdot (p_i + \Delta_i)$, где $|\Delta_i| \le \delta$. Тогда (2) изменится следующим образом:

$$\cdots = \sum_{i=1}^{k} n(p_i + \Delta_i) \cdot \log \tfrac{1}{p_i + \Delta_i} + O(\log n) = n \cdot \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot \log \tfrac{1}{p_i} + O(\log n) + n \cdot O(\delta) < h \cdot n.$$

(Действительно, энтропия — это непрерывная функция, а значит при небольшом отклонении она изменяется на $c \cdot \max_i \Delta_i$, где c зависит от производной функции энтропии.) Итого общее количество δ-типичных слов можно оценить как количество типов умноженное на количество δ-типичных слов одного типа:

$$\mathrm{poly}(n) \cdot 2^{n \cdot H(\alpha) + n \cdot O(\delta) + O(\log n)} < 2^{h \cdot n}.$$

□

Доказательство теоремы 3.5.

1. Если мы будем кодировать только δ-типичные слова, то по лемме 3.4 нам будет достаточно длины кода L_n, а вероятность всех не типичных слов будет стремиться к нулю.

2. Обозначим за $\hat{\varepsilon}_n$ вероятность ошибки при декодировании δ-типичных слов. Мы хотим показать, что $\hat{\varepsilon}_n \to 1$. Давайте рассмотрим конкретное δ-типичное слово $w = \langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n} \rangle$. Пусть $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$ — это частоты букв $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в слове w. Оценим вероятность появления w:

$$\Pr[\langle \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n} \rangle = w] = p_1^{p'_1 \cdot n} \cdot \ldots \cdot p_k^{p'_k \cdot n} = 2^{-(\sum_i p'_i \log \frac{1}{p_i}) \cdot n} \le 2^{-(\sum_i p_i \log \frac{1}{p_i}) \cdot n + O(\delta_n \cdot n)}.$$

Всего мы может корректно закодировать не более 2^{L_n} δ-типичных слов, т.е. вероятность корректно декодировать δ-типичное слово

$$1 - \hat{\varepsilon}_n \leq 2^{L_n} \cdot 2^{-H(\alpha)\cdot n + O(\delta_n \cdot n)} \leq 2^{h\cdot n + 1} \cdot 2^{-H(\alpha)\cdot n + O(\delta_n \cdot n)} \to 0.$$

Таким образом $\hat{\varepsilon}_n \to 1$. Вместе с леммой 3.3 получаем, что $\varepsilon_n \to 1$.

□

Замечание 3.4. Используя предыдущую теорему можно, например, получить альтернативное доказательство неравенства $H(\alpha, \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$. В левой части стоит асимптотическая средняя длина кода при блоковом кодировании (α, β), а справа сумма средних длин кодов при блоковом кодировании α и β отдельно друг от друга. Т.к. мы можем рассмотреть кодирование (α, β) как конкатенацию кодов для α и β, то неравенство выполняется.

4. Свойства распределений

4.1. Энтропийные профили

Утверждение 4.1. *Для любого $h \geq 0$ существует распределение α: $H(\alpha) = h$.*

Доказательство. Возьмём некоторое целое n: $0 \leq h \leq \log n$. Искомое распределение — это линейная комбинация распределений с вероятностями $(1, 0, \ldots, 0)$ и $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$. □

Каким может быть совместное распределение двух случайных величин α и β? Рассмотрим как может быть устроен *энтропийный профиль* $(H(\alpha), H(\beta), H(\alpha, \beta))$.

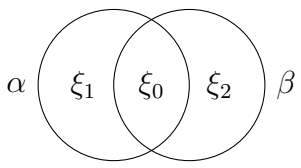
Утверждение 4.2. *Для любых чисел $h_1, h_2, h_{12} \geq 0$, которые удовлетворяют следующим соотношениям*

$$\begin{cases} h_{12} \leq h_1 + h_2 & \iff \quad t_0 = I(\alpha : \beta) \geq 0, \\ h_2 \leq h_{12} & \iff \quad t_1 = H(\alpha \mid \beta) \geq 0, \\ h_1 \leq h_{12} & \iff \quad t_2 = H(\beta \mid \alpha) \geq 0. \end{cases}$$

существует пара случайных величин (α, β) с энтропийным профилем (h_1, h_2, h_{12}).

Доказательство. Пусть ξ_0, ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины с энтропиями t_0, t_1, t_2 соответственно. Тогда $\alpha = (\xi_0, \xi_1)$ и $\beta = (\xi_0, \xi_2)$ будут искомыми величинами.

$$\begin{cases} H(\xi_0) = t_0 = h_1 + h_2 - h_{12}, \\ H(\xi_1) = t_1 = h_{12} - h_2, \\ H(\xi_2) = t_2 = h_{12} - h_1. \end{cases}$$



□

Давайте попробуем разобраться с аналогичным вопросом для троек случайных величин. Энтропийный профиль для тройки (α, β, γ) будет задаваться 7 числами:

$$\big(H(\alpha), H(\beta), H(\gamma), H(\alpha,\beta), H(\alpha,\gamma), H(\beta,\gamma), H(\alpha,\beta,\gamma)\big).$$

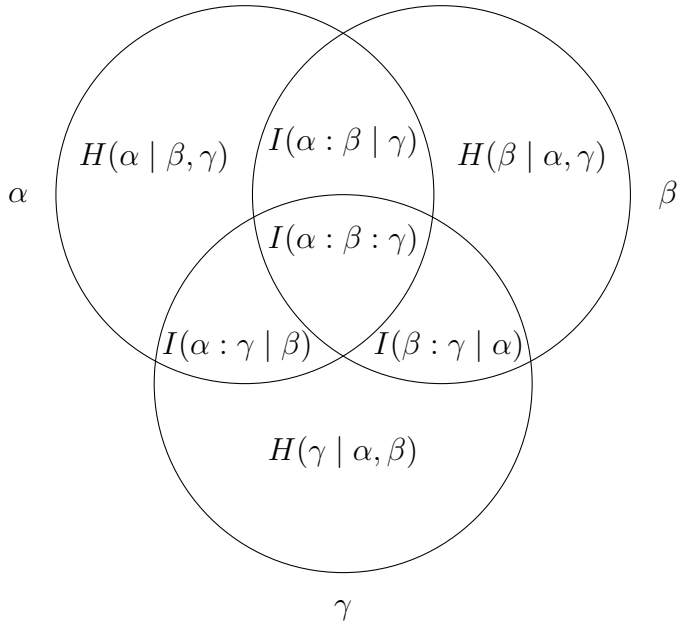
Для случайных величин (α, β, γ) можно записать 9 независимых неравенств.

$$\begin{array}{lll} H(\alpha \mid \beta,\gamma) \geq 0, & I(\alpha:\beta) \geq 0, & I(\alpha:\beta \mid \gamma) \geq 0, \\ H(\beta \mid \gamma,\alpha) \geq 0, & I(\beta:\gamma) \geq 0, & I(\beta:\gamma \mid \alpha) \geq 0, \\ H(\gamma \mid \alpha,\beta) \geq 0, & I(\gamma:\alpha) \geq 0, & I(\gamma:\alpha \mid \beta) \geq 0. \end{array}$$

Определение 4.1. Определим общую информацию трёх случайных величин

$$I(\alpha:\beta:\gamma) = I(\alpha:\beta) - I(\alpha:\beta \mid \gamma).$$

Соотношения на информационные величины имеют удобную геометрическую интерпретацию. Давайте нарисуем три круга Эйлера и сопоставим площади каждой из получившихся замкнутых области некоторую информационную величину.



Мы можем проверить, что в результате получится корректное представление. Так, например, площадь круга α будет соответствовать

$$H(\alpha) = H(\alpha \mid \beta,\gamma) + I(\alpha:\beta \mid \gamma) + I(\alpha:\gamma \mid \beta) + I(\alpha:\beta:\gamma),$$

а пересечение кругов α и β

$$I(\alpha:\beta) = I(\alpha:\beta \mid \gamma) + I(\alpha:\beta:\gamma).$$

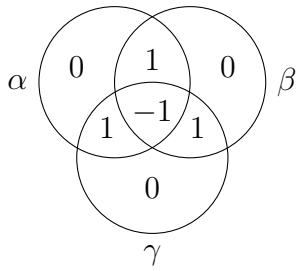
В дальнейшем мы будем использовать эту геометрической интерпретацию для доказательства соотношений на информационные величины.

Утверждение 4.3. *Общая информация трёх случайных величин может быть отрицательной.*

Доказательство. Пусть α и β будут независимыми равномерно распределёнными на $\{0,1\}$ случайными величинами. Случайная величина γ будет принимать значение из $\{0,1\}$ в соответствии со следующим соотношением:

$$\alpha \oplus \beta \oplus \gamma = 0.$$

Мы получим следующую картину:

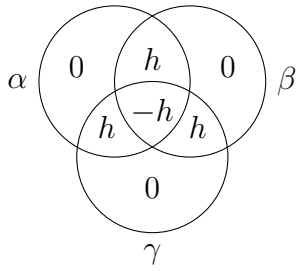


□

Утверждение 4.4. *Других неравенств для троек нет.*

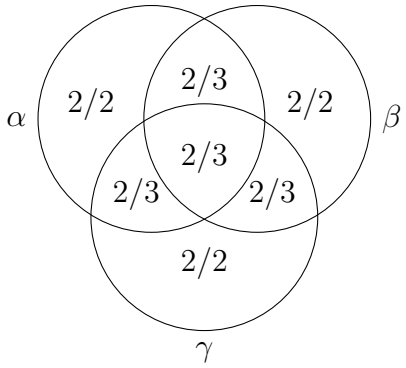
Утверждение 4.5. *Есть профили, которые не реализуются никакими распределениями, но их мера 0.*

Упражнение 4.1. Доказать, что следующий профиль реализуется только при $h = \log n$ для некоторого целого n.



Утверждение 4.6. $2H(\alpha,\beta,\gamma) \leq H(\alpha,\beta) + H(\alpha,\gamma) + H(\beta,\gamma)$.

Доказательство. Отметим сколько раз каждая область входит в левую/в правую часть неравенства.



Таким образом утверждение упрощается до $0 \le I(\beta : \gamma) + I(\alpha : \beta \mid \gamma) + I(\alpha : \gamma \mid \beta)$. □

Следствие 4.1 (Теорема 1.3)**.** *Для* $A \subset \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \times \{0,1\}^*$

$$2\chi(A) \le \chi_{12}(A) + \chi_{13}(A) + \chi_{23}(A).$$

Доказательство. Пусть (α, β, γ) равномерно распределены на A (т.е. случайные величины — это координаты точек в множестве A).

$$2\chi(A) = 2H(\alpha,\beta,\gamma) \le \underbrace{H(\alpha,\beta)}_{\le\chi_{12}(A)} + \underbrace{H(\alpha,\gamma)}_{\le\chi_{13}(A)} + \underbrace{H(\beta,\gamma)}_{\le\chi_{23}(A)}.$$

□

Можно рассмотреть обобщение этой теоремы на произвольное число координат.

Теорема 4.1 (Лемма Ширера)**.** *Пусть* X *— случайная величина, распределённая на* $\{0,1\}^n$*. Для любого распределения* S *на подмножествах* $[n]$*, при котором* $\Pr[i \in S] \ge \mu$*, выполняется* $\mathbb{E}[H(X_S)] \ge \mu \cdot H(X)$*.*

Доказательство. Для любого множества $T = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset [n]$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ выполняется

$$H(X_T) = H(X_{i_1}) + H(X_{i_2} \mid X_{i_1}) + \cdots + H(X_{i_k} \mid X_{i_1}, \ldots, X_{i_{k-1}}).$$

Воспользуемся тем, что $H(X_{i_t} \mid X_{i_1}, \ldots, X_{i_{t-1}}) \ge H(X_{i_t} \mid X_{<i_t})$, тогда

$$H(X_T) \ge H(X_{i_1} \mid X_{<i_1}) + H(X_{i_2} \mid X_{<i_2}) + \cdots + H(X_{i_k} \mid X_{<i_k}).$$

Теперь применим этот факт к распределению S.

$$\begin{aligned}\mathop{\mathbb{E}}_S[H(X_S)] &\ge \mathop{\mathbb{E}}_S\left[\sum_{i\in S} H(X_i \mid X_{<i})\right] = \sum_{i\in[n]} \Pr[i \in S] \cdot H(X_i \mid X_{<i}) \\ &\ge \mu \sum_{i\in[n]} H(X_i \mid X_{<i}) = \mu \cdot H(X).\end{aligned}$$

□

У леммы Ширера имеется множество применений.

Пример 4.1 (Подсчёт треугольников в графе). Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф с t треугольниками, и пусть $\ell = |E|$. Покажем, что $t \leq (2\ell)^{3/2}/6$.

Доказательство. Пусть тройка случайных величин (α, β, γ) равномерно распределена на вершинах треугольников, и пусть $X = (\alpha, \beta, \gamma)$. Тогда $H(X) = H(\alpha, \beta, \gamma) = \log(6t)$, т.к. каждый треугольник случается шестью различными перестановками. Рассмотрим распределение S, равномерное на подмножествах $\{1, 2, 3\}$ размера 2. Тогда $\Pr[i \in S] = 2/3$. По лемме Ширера

$$\mathop{\mathbb{E}}_{S}[H(X_S)] \geq \frac{2}{3}\log(6t),$$

т.е. существует $T \subset \{1, 2, 3\}$, для которого $H(X_T) \geq \frac{2}{3}\log(6t)$. С другой стороны X_T — это распределение на рёбрах графа, то есть $\log(2\ell) \geq H(X_T)$. Из этого получаем, что $2\ell \geq (6t)^{2/3}$. □

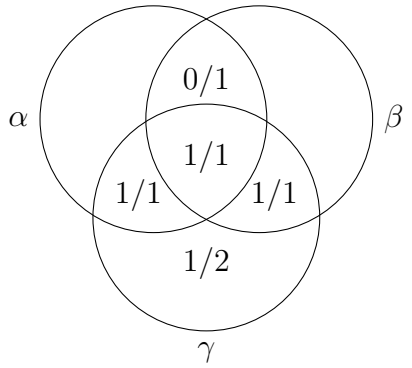
Обобщение для вложения произвольных графов см. в [10].

Утверждение 4.7. *Для любых α, β и γ выполняется следующее неравенство*

$$H(\gamma) \leq H(\gamma \mid \alpha) + H(\gamma \mid \beta) + I(\alpha : \beta).$$

Если $H(\gamma \mid \alpha) = H(\gamma \mid \beta) = 0$ (т.е. γ однозначно определяется и по α и по β), то $H(\gamma) \leq I(\alpha : \beta)$.

Доказательство. Отметим сколько раз каждая область входит в левую/в правую часть неравенства.

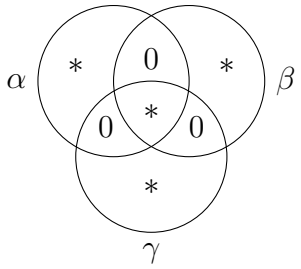


Таким образом неравенство упрощается до $0 \leq H(\gamma \mid \alpha, \beta) + I(\alpha : \beta \mid \gamma)$. □

Упражнение 4.2. Пусть $\alpha \to \beta \to \gamma$ образуют Марковскую цепь, т.е. распределение $\langle \gamma \mid \beta \rangle = \langle \gamma \mid \alpha, \beta \rangle$. Докажите, что $I(\alpha : \gamma) \leq I(\alpha : \beta)$ и $I(\alpha : \gamma) \leq I(\beta : \gamma)$.

Упражнение 4.3. Пусть $\alpha \to \beta \to \gamma \to \delta$ образуют Марковскую цепь. Докажите, что $I(\alpha : \beta) \leq I(\beta : \gamma)$.

Упражнение 4.4. Пусть α, β и γ имеют следующий профиль.



Докажите, что существует случайная величина δ, такая что

$$\begin{cases} H(\delta \mid \alpha) = 0, \\ H(\delta \mid \beta) = 0, \\ H(\delta \mid \gamma) = 0, \\ H(\delta) = I(\alpha : \beta : \gamma). \end{cases}$$

И при этом $I(\alpha : \beta \mid \delta) = I(\alpha : \gamma \mid \delta) = I(\beta : \gamma \mid \delta) = 0$.

Упражнение 4.5. Возьмём в качестве x, y, a, b случайные величины из предыдущего упражнения: $x = \alpha$, $y = \beta$, $a = \gamma$, $b = \delta$. Покажите, что для любых таких (a, b, x, y) из условия $I(x : y \mid a) = I(x : a \mid y) = I(y : a \mid x) = 0$ следует

$$I(a : b) \leq I(a : b \mid x) + I(a : b \mid y) + I(x : y).$$

[Указание: примените неравенство из утверждения 4.7.]

Упражнение 4.6. Возьмём в качестве x, y, a, b случайные величины из упражнения 4.4: $x = \alpha$, $y = \beta$, $a = \gamma$, $b = \delta$. Покажите, что существуют такие (a, b, x, y), для которых

$$I(a : b) \not\leq I(a : b \mid x) + I(a : b \mid y) + I(x : y).$$

(Т.е. условие в предыдущем упражнении было необходимо.)

Утверждение 4.8 (Неравенство для 5 случайных величин)**.**

$$I(a : b) \leq I(a : b \mid x) + I(a : b \mid y) + I(x : y) + I(a : b \mid z) + I(a : z \mid b) + I(b : z \mid a).$$

Следствие 4.2 (Zhang, Yeung, 1998)**.** *Неравенство для 4 случайных величин, которое не выражается через базисные неравенства.*

$$I(a : b) \leq 2I(a : b \mid x) + I(a : b \mid y) + I(x : y) + I(a : x \mid b) + I(b : x \mid a).$$

Утверждение 4.9. *Для 4 случайных величин существует бесконечно много неравенств, которые независимы в совокупности.*

4.2. Неравенства о тройках

Будем в различных предположениях доказывать следующее утверждение

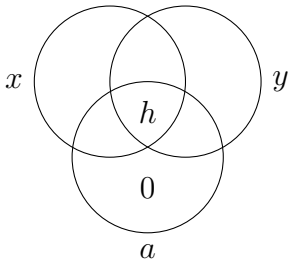
$$H(a \mid x) + H(a \mid y) \leq H(a).$$

Утверждение 4.10. *Если a, x, y такие, что*

$$\begin{cases} H(a \mid y, x) = 0, \\ I(x : y \mid a) = 0. \end{cases}$$

то $H(a \mid x) + H(a \mid y) \leq H(a)$.

Доказательство. Получается, что нам нужно доказать неотрицательность h.



Т.к. $I(x : y \mid a) = 0$, то $h = I(x : y) \geq 0$. □

Утверждение 4.11. *Если a, x, y такие, что $H(a \mid y, x) = 0$ и*

$$\begin{cases} A_i \sim X_j \\ A_i \sim Y_k \end{cases} \implies A_i \sim (X_j, Y_k),$$

то $H(a \mid x) + H(a \mid y) \leq H(a)$. (Обозначение $A_i \sim X_j \iff \Pr[a = A_i \wedge x = X_j] > 0$.)

Замечание 4.1. Условие $H(a \mid x, y) = 0$ можно интерпретировать так: $a = f(x, y)$.

Доказательство. Построим новое распределение (a', x', y'):

- a' имеет то же распределение, что и a,
- условное распределение x' при условии a' совпадает с условным распределением x при условии a,
- условное распределение y' при условии a' совпадает с условным распределением y при условии a,
- x' и y' независимы.

$$\Pr[a' = A_i, x' = X_j, y' = Y_k] = \Pr[a' = A_i] \cdot \Pr[x' = X_j \mid a' = A_i] \cdot \Pr[y' = Y_k \mid a' = A_i].$$

Таким образом

$$H(a', x', y') = H(a') + H(x' \mid a') + H(y' \mid a') - \underbrace{I(x' : y' \mid a')}_{0}.$$

С другой стороны

$$H(a', x', y') \le H(x') + H(y') + H(a' \mid x', y').$$

Кроме того, мы может стереть штрихи почти везде.

$$H(x) + H(y) + H(a' \mid x', y') \ge H(a', x', y') = H(a) + H(x \mid a) + H(y \mid a).$$

Покажем, что $H(a' \mid x', y') = 0$, т.е. $a' = f(x', y')$. Действительно: если тройка (A_i, X_j, Y_k) в новом распределении встречается с положительной вероятностью, то и в исходном распределении она так же встречалась с положительной вероятностью, следовательно $a' = f(x', y')$. Получаем: $H(a) + H(x \mid a) + H(y \mid a) \le H(x) + H(y)$. Прибавим $H(a)$ к обеим частям неравенства:

$$H(x, a) + H(y, a) \le H(x) + H(y) + H(a) \implies H(a \mid x) + H(a \mid y) \le H(a).$$

□

Задача 4.1 (Верещагин,[8]). Рассмотрим двудольный граф с вершинами (L, R) с цветными рёбрами. Все рёбра инцидентные одной вершине разноцветные, степень в левой доле не меньше n, в правой — не меньше m. Пусть известно, что для пары вершин $(x \in L, y \in R)$ есть не более одного общего цвета. Докажите, что количество цветов хотя бы $n \cdot m$.

Заметим, что одноцветные рёбра образуют паросочетания. Для каждого цвета c соединим все согласованные с c вершины слева с согласованными с c вершинами справа. Получим биклику из рёбер цвета c.

Рассмотрим распределение на тройках (a, x, y) (цвет, вершина из левой доли, вершина из правой доли): выбираем цвет пропорционально размеру (количеству рёбер) соответствующей биклики и выбираем случайное ребро этого цвета. Можно проверить, что выполняется следующее соотношение:

$$\begin{cases} A_i \sim X_j, \\ A_i \sim Y_k, \end{cases} \implies A_i \sim (X_j, Y_k).$$

Теперь применим: $\underbrace{H(a \mid x)}_{\ge \log n} + \underbrace{H(a \mid y)}_{\ge \log m} \le H(a) \le \log(\#\text{ цветов})$.

4.3. Условное неравенство о четвёрке

Утверждение 4.12. *Если для случайных величин a, b, x, y выполняется*

$$\begin{cases} I(x : y \mid a) = 0, \\ H(a \mid x, y) = 0, \end{cases}$$

то $I(a : b) \leq I(a : b \mid x) + I(a : b \mid y) + I(x : y)$.

Доказательство. Построим новое распределение (a', b', x', y'): сначала выберем значение $(a', b') \sim (a, b)$. При фиксированном значении (a', b') выбираем независимо x' и y' так, чтобы условные распределения вероятностей относительно a' были такими же, как у x и y относительно a.

$$H(a', b', x', y') = H(a', b') + H(x \mid a', b') + H(y \mid a', b') - \underbrace{I(x' : y' \mid a', b')}_{0} = \\ = H(a, b) + H(x \mid a, b) + H(y \mid a, b).$$

С другой стороны

$$H(a', b', x', y') \leq H(b') + H(x' \mid b') + H(y' \mid b') + H(a' \mid x', y') = \\ = H(b) + H(x \mid b) + H(y \mid b) + H(a' \mid x', y').$$

Покажем, что $H(a' \mid x', y') = 0$. В исходном распределении это выполнялось по условию. Пусть $[a' = A_i, x' = X_j, y' = Y_k]$ в новом распределении случается с положительной вероятностью. Следовательно и в исходном распределении это случается с положительной вероятностью (при фиксированном a' величины x' и y' независимы), а значит сохраняется соответствующее свойство функциональной зависимости a' от (x', y').

В результате получаем

$$H(a, b) + H(x \mid a, b) + H(y \mid a, b) \leq H(b) + H(x \mid b) + H(y \mid b).$$

Распишем это неравенство в безусловных энтропиях:

$$H(a, b) + H(x, a, b) - H(a, b) + H(y, a, b) - H(a, b) \leq H(b) + H(x, b) - H(b) + H(y, b) - H(b).$$

Упрощаем и получаем:

$$H(x, a, b) + H(y, a, b) + H(b) \leq H(x, b) + H(y, b) + H(a, b). \tag{3}$$

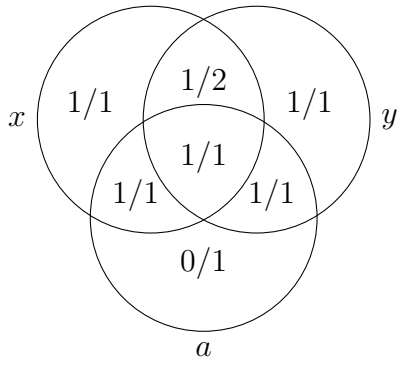
Проделаем то же самое с $I(a : b) \leq I(a : b \mid x) + I(a : b \mid y) + I(x : y)$.

$$\begin{aligned} H(a) + H(b) - H(a, b) \leq \quad & H(a, x) + H(b, x) - H(a, b, x) - H(x) + \\ & H(a, y) + H(b, y) - H(a, b, y) - H(y) + \\ & H(x) + H(y) - H(x, y). \end{aligned}$$

Упрощаем и получаем:

$$H(a,b,x)+H(a,b,y)+H(b)+H(x,y)\leq \begin{array}{l} H(b,x)+H(b,y)+H(a,b)+\\ H(a,x)+H(a,y)-H(a). \end{array} \tag{4}$$

Заметим, что нам осталось доказать лишь $H(x,y)\leq H(a)+H(x\mid a)+H(y\mid a)$. Сложив это неравенство с (3) мы получим (4). Отметим сколько раз каждая область входит в левую/в правую часть неравенства.



Т.е. оно эквивалентно $H(a\mid x,y)+I(x:y\mid a)\geq 0$. □

Вопросы на подумать. Придумать интерпретацию для этого неравенства. Zhang и Yeung в 97 году доказали это же неравенство в предположении $I(x:y)=I(x:y\mid a)=0$. Есть ли комбинаторная интерпретация у этого утверждения?

Список литературы

[1] Н.К. Верещагин, Е.В. Щепин. *Информация, кодирование, предсказание*, МЦНМО, 2012.

[2] Н.К. Верещагин. *Коммуникационная сложность*, Computer Science клуб, 2017. http://compsciclub.ru/courses/communicationcomplexity/2017-spring/

[3] А.Е. Ромащенко. *Введение в теорию информации,* Computer Science клуб, 2015. http://compsciclub.ru/courses/informationtheory/2015-spring/

[4] А.Е. Ромащенко. *Краткий конспект лекций курса "Введение в теорию информации",* 2014. http://www.mccme.ru/~anromash/courses/lecture-notes-it-2014.pdf

[5] В.А. Успенский, Н.К. Верещагин, А.Шень. *Введение в колмогоровскую сложность.* МЦНМО, 2012.

[6] А. Шень. *Алгоритмическая теория информации,* Computer Science клуб, 2008. http://compsciclub.ru/courses/algo-information-theory/2008-autumn/

[7] D. Gavinsky, O. Meir, O. Weinstein, A. Wigderson. *Toward better formula lower bounds: an information complexity approach to the KRW composition conjecture.* STOC 2014.

[8] T.Kaced, A.E. Romashchenko, N.K.Vereshchagin, *A Conditional Information Inequality and Its Combinatorial Applications.* IEEE Trans. Information Theory, 2018.

[9] E. Nisan, N. Kushilevitz. *Communication complexity*, 1997.

[10] A. Rao. *Notes for CSE533: Information Theory in Computer Science*, 2010. https://homes.cs.washington.edu/~anuprao/pubs/CSE533Autumn2010/