Заметки к курсу „Теория информации“. Лекции 1-6

А. Смаль

27 февраля 2020 г.

Аннотация

Курс посвящён изучению подходов к определению понятия „количество информации“. Последовательность изложения материала данного курса основана на классической статье Колмогорова „Три подхода к определению понятия количества информации“ (1965).

В курсе будет рассмотрено три подхода к определению „количества информации“: комбинаторный (информация по Хартли), вероятностный (энтропия Шеннона) и алгоритмический (Колмогоровская сложность). Кроме этого мы поговорим про различные применения аппарата теории информации в различных областях компьютерных наук: в криптографии, в коммуникационной сложности, в теории кодирования, в теории конечных автоматов, в теории сложности вычислений и некоторых других.

Содержание

1. Комбинаторный подход

1.1. Информация по Хартли

Пусть задано некоторое конечное множество A — *множество исходов*.

Определение 1.1 (1928)**.** Определим *количество информации в* A как $\chi(A) = \log_2 |A|$ (мы будем измерять количество информации в битах, поэтому все логарифмы будут по основанию 2, для измерения в байтах нужно выбрать основание 256).

Если про некоторый $x \in A$ стало известно, что $x \in B$, то теперь для идентификации x нам достаточно $\chi(A \cap B) = \log |A \cap B|$ битов, т.е. нам сообщили $\chi(A) - \chi(A \cap B)$ битов информации.

Пример 1.1. Предположим, что мы хотим узнать некоторое неизвестное упорядочение множества $\{a_1, a_2, \dots, a_5\}$. Нам стало известно, что $a_1 > a_2$ или $a_3 > a_4$. Сколько битов информации мы узнали? Множество A состоит из 5! перестановок, множество B — из перестановок, которые удовлетворяют новому условию. Легко проверить, что $|B| = 90$. Итого мы узнали $\log 120 - \log 90 = \log(4/3)$ битов.

Пусть $A \subset \{0,1\}^* \times \{0,1\}^*$. Обозначим через $\pi_1(A)$ и $\pi_2(A)$ проекции множества A на первую и вторую координату соответственно, а $\chi_1(A) = \log |\pi_1(A)|$ и $\chi_2(A) = \log |\pi_2(A)|$ — количество информации в них по Хартли.

Теорема 1.1. $\chi(A) \le \chi_1(A) + \chi_2(A)$.

Определение 1.2. Количество информации в второй координате $A \subset \{0,1\}^* \times \{0,1\}^*$ при известной первой

$$\chi_{2|1} = \log \left(\max_{a \in \pi_1(A)} \bigl|\{x \mid (a, x) \in A\}\bigr| \right).$$

Теорема 1.2. $\chi(A) \le \chi_1(A) + \chi_{2|1}(A)$.

Теорема 1.3. *Для* $A \subset \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \times \{0,1\}^*$

$$2 \cdot \chi(A) \le \chi_{12}(A) + \chi_{13}(A) + \chi_{23}(A).$$

Следствие 1.1. *Квадрат объёма трёхмерного тела не превосходит произведение площадей его проекций на координатные плоскости.*

Утверждение 1.1. *Если* $f : X \to Y$

1. *является сюръекцией, то* $\chi(Y) \le \chi(X)$*,*
2. *является инъекцией, то* $\chi(X) \le \chi(Y)$*.*

1.2. Применение: игра в 10 вопросов

Сколько вопросов на ДА/НЕТ нужно задать, чтобы определить загаданное число от 1 до N, если (а) можно задавать вопросы адаптивно; (б) вопросы нужно написать на бумажке заранее.

Оценка $\lceil \log N \rceil$ достигается в обоих случаях, если задавать вопросы про биты двоичного представления загаданного числа.

Докажем нижнюю оценку. Пусть $A = [N]$. Множество $Q = \{(q_1, q_2, \ldots, q_k)\}$ — множество протоколов (ответы на вопросы). Можно рассматривать A и Q как проекции некоторого множества исходов игры S на разные координаты. Тогда верны следующие неравенства:

- $\chi_Q(S) = \chi(Q) \le \chi_1(Q) + \chi_2(Q) + \cdots + \chi_k(Q) \le k$,
- $\chi_A(S) = \chi(A) \le \chi(S) \le \chi_Q(S) + \chi_{A|Q}(S) \le k + 0 = k$.

Таким образом получаем, что $\log N = \chi(A) \le k$.

1.3. Цена информации

Пусть загадано некоторое целое число от 1 до n (где $n \ge 2$). Разрешается задавать любые вопросы с ответами ДА/НЕТ. При ответе ДА мы заплатим 1 рубль, а при ответе НЕТ — два рубля. Сколько необходимо и достаточно заплатить для отгадывания числа?

Верхняя оценка. Будем задавать вопросы так, чтобы отрицательные ответы приносили в два раза больше информации, чем положительные. Тогда за каждый бит информации мы заплатим некоторое константное количество рублей c. Пусть все вопросы будут вида „$x \in T$?“. Потребуем, чтобы

$$2 \cdot (\log |X| - \log |X \cap T|) = \log |X| - \log |X \cap \overline{T}|.$$

Пусть $|X \cap T| = \alpha |X|$, тогда $|X \cap \overline{T}| = (1 - \alpha)|X|$, таким образом получается уравнение

$$2 \log(1/\alpha) = \log(1/(1 - \alpha)),$$

эквивалентное квадратному уравнению

$$\alpha^2 = 1 - \alpha.$$

Из двух корней нас интересует тот, что меньше 1, т.е. $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$. Следовательно при любом ответе мы заплатим $c = 1/(-\log \alpha) \approx 1.44$ рублей за бит, а в целом — $c \log n$ рублей.

В этой оценке мы полностью проигнорировали вопросы округления. Действительно, у нас никогда получится разделить множество из n элементов на два в отношении

$\alpha : (1-\alpha)$, т.к. α — иррациональное. Поэтому на каждом вопросе будет накапливаться некоторая ошибка округления. Давайте вместо вопросов принадлежности некоторому подмножеству T множества X будем задавать вопрос о принадлежности отрезку с вещественными координатами. Начнём с отрезок $S = [1, n]$ и будем каждый раз уменьшать его в $1/\alpha$ раз, т.е. первым вопросом спросим, принадлежит ли x отрезку $S' = [1, 1+\alpha(n-1)]$. Длина отрезка S' в $1/\alpha$ раз меньше длины отрезка S. Продолжим действовать так же до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 1 — в этом случае x определено однозначно. После каждого вопроса длина отрезка уменьшается максимум в $1/(1-\alpha) = 1/\alpha^2$, поэтому длина последнего отрезка не меньше α^2. Таким образом длина отрезка сократится не более, чем в $(n-1)/\alpha^2$ раз. Поскольку мы каждый раз выбирали отрезки так, чтобы платить c рублей за уменьшение $\log|S|$ на 1, то в сумме заплатим не более

$$c\log((n-1)/\alpha^2) = c\log(n-1) - 2c\log\alpha = c\log(n-1) + 2.$$

При любом исходе мы заплатим целое число рублей, поэтому эту оценку можно уточнить до $\lfloor c\log(n-1)\rfloor + 2$.

Нижняя оценка. Применим рассуждение про злонамеренного противника (adversary argument). Пусть противник выбирает ответ ДА/НЕТ в зависимости от того, какое из двух значений $1/(\log|X| - \log|X \cap T|)$ и $2/(\log|X| - \log|X \cap \overline{T}|)$ больше. При любых X, T одно из этих значений не меньше $c = 1/(-\log\alpha)$. Таким образом мы заставляем алгоритм платить не менее c рублей за бит, а значит любой алгоритм в худшем случае заплатит $\lceil c\log n\rceil$ рублей.

2. Вероятностный подход

2.1. Энтропия Ше́ннона

Энтропия Шеннона определяет количество информации $H(\alpha)$ в распределении вероятностей для некоторой случайной величины α. Пусть α принимает значения из множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ с вероятностями $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$, $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$.

Нам бы хотелось, чтобы это определение согласовывалось с определением Хартли, т.е. имеют место следующие „граничные условия“:

- если $p_1 = \cdots = p_k$, то $H(\alpha) = \log k$,
- если $p_1 = 1$, $p_2 = \cdots = p_k = 0$, то $H(\alpha) = 0$.

Будем искать $H(\alpha)$ в виде математического ожидания информации, которую мы получаем от каждого исхода.

$$H(\alpha) = \sum_i p_i \cdot (\text{информация в } a_i).$$

Как оценить, сколько информации в исходе a_i? Пусть U — всё пространство элементарных исходов, все исходы которого равновероятны. Тогда событию $\alpha = a_i$ соответствует множеству элементарных исходов меры p_i. Соответственно, если случилось событие $\alpha = a_i$, то размер множества согласованных с этим событием исходов уменьшается с $|U|$ до $p_i|U|$, т.е. событие $\alpha = a_i$ сообщает нам $\log|U| - \log(p_i|U|) = \log\frac{1}{p_i}$ битов информации. Пусть теперь элементарные исходы не равновероятны. В этом случае событие $\alpha = a_i$ сообщает нам информацию, которая уменьшает *меру* множества возможных исходов в $1/p_i$ раз, т.е. опять получаем $\log 1 - \log p_i = \log\frac{1}{p_i}$. Это приводит нас к следующему определению.

Определение 2.1 (1948)**.** Энтропия Шеннона случайной величины α

$$H(\alpha) = \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot \log\frac{1}{p_i}.$$

(По непрерывности доопределим $0 \cdot \log\frac{1}{0} = 0$.)

Можно вывести это соотношение из определения информации по Хартли другим способом. Пусть W_n — это множество всех слов длины n состоящих из букв $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, где каждая буква a_i встречается ровно $n_i = p_i \cdot n$ раз (будем считать, что вероятности p_i рациональны, и что множество W_n определено только тогда, когда все n_i целые). Информация по Хартли в W_n

$$\chi(W_n) = \log|W_n| = \log\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Это выражение можно оценить при помощи формулы Стирлинга.

$$\begin{aligned}
\chi(W_n) &= \log\frac{\mathrm{poly}(n)\cdot(n/e)^n}{\mathrm{poly}(n)\cdot(n_1/e)^{n_1}\cdot(n_1/e)^{n_2}\cdots(n_k/e)^{n_k}} = \\
&= \log\left(\left(\frac{n}{n_1}\right)^{n_1}\cdot\left(\frac{n}{n_2}\right)^{n_2}\cdots\left(\frac{n}{n_k}\right)^{n_k}\right) + O(\log n) = \\
&= \log\left(\left(\frac{1}{p_1}\right)^{p_1\cdot n}\cdot\left(\frac{1}{p_2}\right)^{p_2\cdot n}\cdots\left(\frac{1}{p_k}\right)^{p_k\cdot n}\right) + O(\log n) = \\
&= n\cdot\sum_{i=1}^{k} p_i\cdot\log\frac{1}{p_i} + O(\log n).
\end{aligned}$$

В среднем на один символ приходится $\chi(W_n)/n$ битов информации. В пределе получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\chi(W_n)}{n} = \sum_{i=1}^{k} p_i\cdot\log\frac{1}{p_i} = H(\alpha)$$

(предел нужно брать по бесконечной подпоследовательности натуральных чисел n таких, для которых все $\{n_i\}$ — целые).

Лемма 2.1. *Для энтропии Шеннона выполняются следующие соотношения.*

- $H(\alpha) \geq 0$, *причём* $H(\alpha) = 0 \iff$ *распределение* α *вырождено.*
- $H(\alpha) \leq \log k$, *причём* $H(\alpha) = \log k \iff$ *величина* α *распределена равномерно.*

Для доказательства нам потребуется следующая теорема.

Теорема 2.1 (Неравенство Йенсена)**.** *Пусть функция* $f(x)$ *является вогнутой на некотором промежутке* $\mathcal{X}$ *и числа* $q_1, q_2, \ldots, q_n > 0$ *таковы, что* $q_1 + \cdots + q_n = 1$. *Тогда для любых* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *из промежутка* $\mathcal{X}$ *выполняется неравенство:*

$$\sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right).$$

Доказательство леммы 2.1. Первое свойство следует напрямую из определения: каждый член суммы $H(\alpha)$ неотрицателен и равен нулю только в случае, если $p_i = 0$ или $p_i = 1$.

Для доказательства второго неравенства перенесём всё в левую часть и применим неравенство Йенсена:

$$H(\alpha) - \log k = \sum_{i=1}^{k} p_k \cdot \log \frac{1}{p_i} - \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot \log k = \sum_{i=1}^{k} p_k \cdot \log \frac{1}{p_i k} \leq \log\left(\sum_{i=1}^{k} p_i \frac{1}{p_i k}\right) = \log 1 = 0.$$

□

Энтропию совместного распределения пары случайных величин α и β будем обозначать $H(\alpha, \beta)$.

Лемма 2.2. *Выполняются следующие свойства:*

- $H(\alpha, \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$, *причём равенство достигается тогда и только тогда, когда случайные величины независимы;*
- $H(\alpha) \leq H(\alpha, \beta)$, *причём равенство достигается тогда и только тогда, когда* β *полностью определяется значением* α, *т.е.* $\beta = f(\alpha)$.

Доказательство. Введём обозначения для вероятностей событий совместного распределения вероятностей (α, β). Пусть пара (a_i, b_j) имеет вероятность $p_{i,j}$, событие $[\alpha = a_i]$ имеет вероятность $p_{i,*} = p_{i,1} + \cdots + p_{i,n}$, а событие $[\beta = b_j]$ — вероятность $p_{*,j} = p_{1,j} + \cdots + p_{k,j}$. В этих обозначениях неравенство $H(\alpha, \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$ переписывается как

$$\sum_{i,j} p_{i,j} \cdot \log \frac{1}{p_{i,j}} \leq \sum_{i} \sum_{j} p_{i,j} \cdot \log \frac{1}{p_{i,*}} + \sum_{j} \sum_{i} p_{i,j} \cdot \log \frac{1}{p_{*,j}}.$$

Перенесём всё в левую часть и применим неравенство Йенсена.

$$\sum_{i,j} p_{i,j} \cdot \log \frac{p_{i,*} \cdot p_{*,j}}{p_{i,j}} \le \log \left(\sum_{i,j} p_{i,j} \cdot \frac{p_{i,*} \cdot p_{*,j}}{p_{i,j}} \right) = \log \left(\sum_{i,j} p_{i,*} \cdot p_{*,j} \right) =$$

$$= \log \left(\underbrace{\left(\sum_i p_{i,*} \right)}_{1} \cdot \underbrace{\left(\sum_j p_{*,j} \right)}_{1} \right) = 0.$$

Равенство в неравенстве Йенсена для $f(x) = \log(x)$ достигается только, если все точки равны, т.е. для любых i, j $\frac{p_{i,*}p_{*,j}}{p_{i,j}} = c$ для некоторой константы c. Несложно заметить, что $c = 1$, т.к. выполняется следующее равенство $\sum_{i,j} p_{i,*}p_{*,j} = c \sum_{i,j} p_{i,j}$ в котором обе суммы равны 1. Таким образом в случае равенства α и β независимы.

Доказательство второго свойства мы получим как следствие из свойств условной энтропии. $\square$

Определение 2.2. Энтропия α при условии $\beta = b_j$

$$H(\alpha \mid \beta = b_j) = \sum_i \Pr[\alpha = a_i \mid \beta = b_j] \cdot \log \frac{1}{\Pr[\alpha = a_i \mid \beta = b_j]}.$$

Определение 2.3. *Условная (относительная) энтропия* α относительно β

$$H(\alpha \mid \beta) = \sum_j \Pr[\beta = b_j] \cdot H(\alpha \mid \beta = b_j).$$

Другими словами

$$H(\alpha \mid \beta) = \mathop{\mathrm{E}}_{b_j \leftarrow \beta} [H(\alpha \mid \beta = b_j)].$$

Если подставить определение 2.2, то можно получить выражение для условной энтропии через отдельные вероятности событий.

$$H(\alpha \mid \beta) = \sum_j \Pr[\beta = b_j] \cdot \sum_i \Pr[\alpha = a_i \mid \beta = b_j] \cdot \log \frac{1}{\Pr[\alpha = a_i \mid \beta = b_j]} = \sum_{i,j} p_{i,j} \cdot \log \frac{p_{*,j}}{p_{i,j}}.$$

Лемма 2.3. *Условная энтропия обладает следующими свойствами.*

- $H(\alpha \mid \beta) \ge 0$.
- $H(\alpha \mid \beta) = 0 \iff \alpha$ *однозначно определяется по* β.
- $H(\alpha, \beta) = H(\beta) + H(\alpha \mid \beta) = H(\alpha) + H(\beta \mid \alpha)$.

Доказательство. Первое свойство выполняется, т.к. условная энтропия это матожидание неотрицательной случайной величины. Второе свойство объясняется тем, что для любого j распределение $\langle \alpha \mid \beta = b_j \rangle$ имеет нулевую энтропию, т.е. распределение вырождено и каждому b_j соответствует ровно один a_i. Третье свойство следует из следующего равенства.

$$\sum_{i,j} p_{i,j} \cdot \log \frac{1}{p_{i,j}} = \sum_{i,j} p_{i,j} \cdot \log \frac{1}{p_{*,j}} + \sum_{i,j} p_{i,j} \cdot \log \frac{p_{*,j}}{p_{i,j}}.$$

(Нужна аккуратность, если есть строки, которые состоят из одних нулей, т.е $p_{*,j} = 0$ — такие строки не нужно включать в эти суммы.) □

Следствие 2.1. *$H(\alpha, \beta) \geq H(\alpha)$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $\beta = f(\alpha)$.*

Доказательство. $H(\alpha, \beta) - H(\alpha) = H(\beta \mid \alpha) \geq 0$. По второму свойству условной энтропии равенство достигается тогда и только тогда, когда $\beta = f(\alpha)$. □

2.2. Взаимная информация

Определение 2.4. *Информация в α о величине β* определяется следующим соотношением:

$$I(\alpha : \beta) = H(\beta) - H(\beta \mid \alpha).$$

Эту величину так же *называют взаимной информацией случайных величин α и β.*

Лемма 2.4. *Для взаимной информации выполняются следующие соотношения.*

1. $I(\alpha : \beta) \leq H(\alpha)$.
2. $I(\alpha : \beta) \leq H(\beta)$.
3. $I(\alpha : \alpha) = H(\alpha)$.
4. $I(\alpha : \beta) = I(\beta : \alpha)$.
5. $I(\alpha : \beta) = H(\alpha) + H(\beta) - H(\alpha, \beta)$.

Определение 2.5. Пусть α, β, γ — случайные величины. Определим *взаимную информацию в α о β при условии γ.*

1. $I(\alpha : \beta \mid \gamma) = H(\beta \mid \gamma) - H(\beta \mid \alpha, \gamma)$.
2. $I(\alpha : \beta \mid \gamma) = \sum_\ell I(\alpha : \beta \mid \gamma = c_\ell) \cdot \Pr[\gamma = c_\ell]$.
3. $I(\alpha : \beta \mid \gamma) = H(\alpha \mid \gamma) + H(\beta \mid \gamma) - H(\alpha, \beta \mid \gamma)$.
4. $I(\alpha : \beta \mid \gamma) = H(\alpha, \gamma) + H(\beta, \gamma) - H(\alpha, \beta, \gamma) - H(\gamma)$.

Лемма 2.5. *Все определения условной взаимной информации эквивалентны.*

Доказательство. (3) $\iff$ (4).

$(3) = H(\alpha \mid \gamma)+H(\beta \mid \gamma)-H(\alpha,\beta \mid \gamma) = H(\alpha,\gamma)-H(\gamma)+H(\beta,\gamma)-H(\gamma)-H(\alpha,\beta,\gamma)+H(\gamma).$

□

Утверждение 2.1 (chain rule for mutual information)**.** *Имеют место следующие соотношения:*

1. $I((\alpha,\beta):\gamma) = I(\alpha:\gamma) + I(\beta:\gamma \mid \alpha)$.
2. $I((\alpha,\beta):\gamma \mid \delta) = I(\alpha:\gamma \mid \delta) + I(\beta:\gamma \mid \alpha,\delta)$.

3. Кодирование

3.1. Однозначно декодируемые коды

Определение 3.1. Будем называть *кодом* функцию $C : \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \to \{0,1\}^*$, сопоставляющую буквам некоторого алфавита *кодовые слова*. Если любое сообщение, которое получено применением кода C, декодируется однозначно (т.е. только единственным образом разрезается на образы C), то такой код называется *однозначно декодируемым*.

Определение 3.2. Код называется *префиксным (беспрефиксным, prefix-free)*, если никакое кодовое слово не является префиксом другого кодового слова.

Теорема 3.1 (Неравенство Крафта-Макмилана)**.** *Для любого однозначно декодируемого кода со множеством кодовых слов $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ выполняется следующее неравенство:*

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-|c_i|} \le 1.$$

Лемма 3.1. *Для префиксных кодов верно неравенство Крафта-Макмилана.*

Доказательство. Рассмотрим дерево префиксного кода и посчитаем суммарную меру поддеревьев, которые соответствуют кодовым словам. □

Утверждение 3.1. *Для префиксных кодов верно и обратное: если есть набор целых чисел $\{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n\}$, удовлетворяющие неравенству Крафта-Макмилана*

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-\ell_i} \le 1,$$

то существует префиксный код с кодовыми словами $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, где $|c_i| = \ell_i$.

Доказательство. Отсортируем ℓ_i по возрастанию и будем развешивать их в бесконечном двоичном дереве, выбирая каждый раз самый левый свободный узел соответствующей меры. Можно заметить, что мы всегда сможем найти такой узел. □

Следствие 3.1. *Для любого однозначно декодируемого кода существует префиксный код с теми же длинами кодовых слов.*

Доказательства теоремы 3.1. Сопоставим кодовым словам $\{c_i\}$ мономы $\{p_i\}$ от переменных x и y таким образом, что каждый '0' в кодовом слове соответствует x, а каждая '1' — y:

$$c_i = 0110101 \implies p_i(x, y) = xyyxyxy.$$

Рассмотрим следующее выражение для некоторого L.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i(x, y)\right)^L = \sum_{\ell=L}^{\max|c_i|\cdot L} M_\ell(x, y),$$

где M_ℓ обозначает сумму всех получившихся мономов степени ℓ. Заметим, что в каждом M_ℓ не более 2^ℓ мономов: в противном случае код не был бы однозначно декодируемым — каждый моном (без учёта коммутативности и ассоциативности) мог получиться не более одного раза.

Теперь рассмотрим значение этого выражения при $x = y = \frac{1}{2}$.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\right)^L = \sum_{\ell=L}^{\max|c_i|\cdot L} M_\ell\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \leq \sum_{\ell=L}^{\max|c_i|\cdot L} (2^{-\ell} \cdot 2^\ell) \leq L \cdot \max|c_i| = O(L). \tag{1}$$

Предположим теперь, что неравенство Крафта-Макмилана не выполняется, т.е.

$$q = \sum_{i=1}^{n} p_i(1/2, 1/2) = \sum_{i=1}^{n} 2^{-|c_i|} > 1.$$

Сравнивая это с (1) получаем противоречие: $q^L = O(L)$ (левая часть растёт экспоненциально, а правая — линейно). □

Пусть для каждого символа алфавита задана вероятность p_i. Нас будут интересовать самые короткие в среднем коды, т.е. такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot |c_i| \to \min.$$

Теорема 3.2 (Шеннон)**.** *Для любого однозначно декодируемого кода выполняется*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot |c_i| \geq \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log \frac{1}{p_i}.$$

Доказательство. Перенесём всё в правую часть и применим неравенство Йенсена:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log \frac{2^{-|c_i|}}{p_i} \leq \log \sum_{i=1}^{n} \left(p_i \frac{2^{-|c_i|}}{p_i}\right) = \log \sum_{i=1}^{n} 2^{-|c_i|} \leq \log 1 = 0.$$

□

Теорема 3.3 (Шеннон). *Для любого распределения вероятностей* $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ *существует однозначно декодируемый/префиксный код* $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, *такой что*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot |c_i| \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log \frac{1}{p_i} + 1.$$

Замечание 3.1. От '+1' в правой части никак не избавиться: например, если у нас только два символа в алфавите, то $\sum p_i \cdot |c_i| = 1$, в то время как $\sum p_i \log \frac{1}{p_i}$ может быть сколько угодно близко к нулю.

Доказательство. Покажем, что найдутся $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ такие, что $|c_i| = \lceil \log \frac{1}{p_i} \rceil$. Код существует, т.к. для длин c_i выполняется неравенство Крафта-Макмилана:

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-|c_i|} = \sum_{i=1}^{n} 2^{-\lceil \log \frac{1}{p_i} \rceil} \leq \sum_{i=1}^{n} 2^{-\log \frac{1}{p_i}} = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Теперь оценим среднюю длину кода:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot |c_i| = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left\lceil \log \tfrac{1}{p_i} \right\rceil < \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left(\log \tfrac{1}{p_i} + 1 \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log \tfrac{1}{p_i} \right) + 1.$$

□

3.2. Код Шеннона-Фано

Упорядочим вероятности символов по убыванию: $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n$. Уложим на прямой без пропусков отрезки длиной p_1, p_2,..., p_n и обозначим i-ый отрезок через S_i, а их объединение — через S. Коды тех букв a_i, для которых отрезок S_i попал в левую половину S, будут начинаться с '0', а коды тех букв, для которых отрезок S_i попал в правую часть S — с '1'. Центральный отрезок может не попасть целиком в одну из половин S. Если центральный отрезок является первым или последним, то начнём его код, соответственно, с '0' или '1'. В противном случае отнесём его в произвольную половину S. Далее применяем эту стратегию отдельно для букв из левой половины S и отдельно для правой половины S. Повторяем так пока не получим уникальные коды для всех символов.

Определение 3.3. Будем называть кодирование, при котором для некоторой константы c и для всех i выполняется $|c_i| \leq -\log p_i + c$, *сбалансированным*.

Теорема 3.4 (Шеннон). *Средняя длина кода Шеннона-Фано близка к энтропии, но не обязательно оптимальна:*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot |c_i| = H + O(1).$$

3.3. Код Хаффмана

Определение 3.4. Будем строить *код Хаффмана* по индукции. При $n = 2$ коды $c_1 = \langle 0 \rangle$, $c_2 = \langle 1 \rangle$. При $n > 2$ будем предполагать, что вероятности упорядочены по убыванию $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n$. Заменим символы a_{n-1} и a_n на символ a'_{n-1} с вероятностью $p'_{n-1} = p_{n-1} + p_n$. Построим код Хаффмана для $n-1$ символа. Для символов a_{n-1} и a_n возьмём коды $c_{n-1} = c'_{n-1}0$ и $c_n = c'_{n-1}1$.

Лемма 3.2. *Средняя длина кодового слова для кода Хаффмана оптимальна, т.е. не превосходит средней длины любого другого префиксного кода (а значит и любого однозначно декодируемого).*

Следствие 3.2. *Для кода Хаффмана выполняется неравенство из теоремы Шеннона 3.3.*

Замечание 3.2. На энтропию случайной величины иногда удобно смотреть как на среднюю длину кода Хаффмена.

3.4. Арифметическое кодирование

Мы построим код со следующим ограничением на среднюю длину:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot |c_i| \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log \frac{1}{p_i} + 2,$$

что хуже, чем в теореме Шеннона.

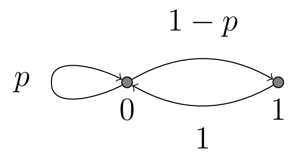
Определение 3.5. Будем называть полуинтервал *стандартным*, если он имеет вид $[0.v0_2, 0.v1_2)$, где v — это некоторая последовательность битов, а числа записаны в двоичной системе счисления. Будем сопоставлять каждому стандартному интервалу $[0.v0_2, 0.v1_2)$ код $v0$.

Для первой буквы кода на отрезке [0,1] мы отложим слева направо непересекающиеся интервалы длины p_i. Пусть первая буква блока — это a_{i_1}, тогда для второй буквы кода мы внутри интервала соответствующего p_{i_j} повторим эту операцию (отложим непересекающиеся интервалы), но длины интервалов будут уже масштабированы с коэффициентом p_i. Повторим эту операцию k раз. Получившемуся интервалу в качестве его кода сопоставим код наибольшего стандартного интервала, который полностью содержится внутри него.

Утверждение 3.2. *В интервале $[a, b)$ всегда найдётся стандартный интервал длины 2^{-k}, где $\frac{b-a}{4} < 2^{-k} \leq \frac{b-a}{2}$, т.е. длина кода любого интервала при арифметическом кодировании не превосходит $\log \frac{4}{b-a} = \log \frac{1}{p} + 2$, где p — вероятность соответствующего блока.*

Замечание 3.3. В случае Марковской цепи можно строить код с соответствующими условными вероятностями.

Упражнение 3.1. Пусть Марковская цепь задана графом.



Определим $h_p = \lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}{n}$. Найти $\max\limits_{p} h_p$.

3.5. Блоковые коды с ошибками

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — независимые одинаково распределённые на $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ случайные величины с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_k$. Рассмотрим блоковое кодирование, заданное функциями E_n и D_n:

$$E_n : \{a_1, a_2, \dots, a_k\}^n \to \{0,1\}^{L_n},$$

$$D_n : \{0,1\}^{L_n} \to \{a_1, a_2, \dots, a_k\}^n,$$

Определение 3.6. *Вероятность ошибки ε_n* — это вероятность следующего события: $[(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}) \mid D_n(E_n(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})) \neq (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})]$.

Теорема 3.5 (Шеннон)**.** *При блоковом кодировании допускающем ошибки выполняются следующие соотношения.*

1. *Если $h > H(\alpha) = \sum_{i=1}^{k} p_i \log \frac{1}{p_i}$, то существует функции (E_n, D_n) для $L_n = \lceil h \cdot n \rceil$, такие что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.*

2. *Если $h < H(\alpha) = \sum_{i=1}^{k} p_i \log \frac{1}{p_i}$, то для любых функций (E_n, D_n) для $L_n = \lceil h \cdot n \rceil$ вероятность ошибки $\varepsilon_n \to 1$ при $n \to \infty$.*

Определение 3.7. Будем называть слово $w = \langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \rangle$ *δ-типичным*, если каждая буква a_j встречается в нём t_j раз, причём

$$\begin{cases} t_j \leq (p_j + \delta) \cdot n, \\ t_j \geq (p_j - \delta) \cdot n. \end{cases}$$

Лемма 3.3. *Для $\delta = n^{-0.49} = \frac{n^{0.01}}{\sqrt{n}}$ вероятность не δ-типичного не превосходит ε_n, для $\varepsilon_n \to 0$.*

Доказательство. Применить неравенство Чебышева

$$\mathrm{P}[|X - \mu| \geq \delta n] \leq \frac{\sigma^2}{(\delta n)^2} = \frac{n p_i (1 - p_i)}{\delta^2 n^2} = O(n^{-0.02}).$$

□

Лемма 3.4. *Для $\delta = n^{-0.49}$ количество δ-типичных слов не превосходит $2^{h\cdot n}$ (при достаточно больших n).*

Доказательство. Давайте для начала рассмотрим слова определённого *типа*, в которых буква i встречается n_i раз, $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Сначала оценим количество слов типа, в котором $n_i = n \cdot p_i$. Таких слов

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

По формуле Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (1 + o(1))$.

$$\log \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \approx \log \frac{\mathrm{poly}(n)\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\mathrm{poly}(n)\left(\frac{n_1}{e}\right)^{n_1}\cdots\left(\frac{n_k}{e}\right)^{n_k}} =$$

$$= \log\left(\frac{n}{n_1}\right)^{n_1}\cdots\left(\frac{n}{n_k}\right)^{n_k} + O(\log n) = \sum_{i=1}^{k}\underbrace{np_i}_{n_i}\cdot\log\tfrac{1}{p_i} + O(\log n) < h\cdot n. \quad (2)$$

Последнее неравенство выполняется асимптотически, т.к. по предположению $h > H(\alpha)$. Мы оценили это только для конкретного типа слов. Давайте оценим для произвольного δ-типичного слова с $n_i = n\cdot(p_i + \Delta_i)$, где $|\Delta_i| \le \delta$. Тогда (2) изменится следующим образом:

$$\cdots = \sum_{i=1}^{k} n(p_i+\Delta_i)\cdot\log\tfrac{1}{p_i+\Delta_i} + O(\log n) = n\cdot\sum_{i=1}^{k}p_i\cdot\log\tfrac{1}{p_i} + O(\log n) + n\cdot O(\delta) < h\cdot n.$$

(Действительно, энтропия — это непрерывная функция, а значит при небольшом отклонении она изменяется на $c\cdot\max_i\Delta_i$, где c зависит от производной функции энтропии.) Итого общее количество δ-типичных слов можно оценить как количество типов умноженное на количество δ-типичных слов одного типа:

$$\mathrm{poly}(n)\cdot 2^{n\cdot H(\alpha)+n\cdot O(\delta)+O(\log n)} < 2^{h\cdot n}.$$

□

Доказательство теоремы 3.5.

1. Если мы будем кодировать только δ-типичные слова, то по лемме 3.4 нам будет достаточно длины кода L_n, а вероятность всех не типичных слов будет стремиться к нулю.

2. Обозначим за $\hat{\varepsilon}_n$ вероятность ошибки при декодировании δ-типичных слов. Мы хотим показать, что $\hat{\varepsilon}_n \to 1$. Давайте рассмотрим конкретное δ-типичное слово $w = \langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\rangle$. Пусть $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$ — это частоты букв $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в слове w. Оценим вероятность появления w:

$$\Pr[\langle\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_n}\rangle = w] = p_1^{p'_1\cdot n}\cdot\ldots\cdot p_k^{p'_k\cdot n} = 2^{-(\sum_i p'_i\log\frac{1}{p_i})\cdot n} \le 2^{-(\sum_i p_i\log\frac{1}{p_i})\cdot n + O(\delta_n\cdot n)}.$$

Всего мы может корректно закодировать не более 2^{L_n} δ-типичных слов, т.е. вероятность корректно декодировать δ-типичное слово

$$1 - \hat{\varepsilon}_n \leq 2^{L_n} \cdot 2^{-H(\alpha)\cdot n + O(\delta_n \cdot n)} \leq 2^{h\cdot n+1} \cdot 2^{-H(\alpha)\cdot n + O(\delta_n \cdot n)} \to 0.$$

Таким образом $\hat{\varepsilon}_n \to 1$. Вместе с леммой 3.3 получаем, что $\varepsilon_n \to 1$.

□

Замечание 3.4. Используя предыдущую теорему можно, например, получить альтернативное доказательство неравенства $H(\alpha, \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$. В левой части стоит асимптотическая средняя длина кода при блоковом кодировании (α, β), а справа сумма средних длин кодов при блоковом кодировании α и β отдельно друг от друга. Т.к. мы можем рассмотреть кодирование (α, β) как конкатенацию кодов для α и β, то неравенство выполняется.

4. Свойства распределений

4.1. Энтропийные профили

Утверждение 4.1. *Для любого $h \geq 0$ существует распределение α: $H(\alpha) = h$.*

Доказательство. Возьмём некоторое целое n: $0 \leq h \leq \log n$. Искомое распределение — это линейная комбинация распределений с вероятностями $(1, 0, \ldots, 0)$ и $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$. □

Каким может быть совместное распределение двух случайных величин α и β? Рассмотрим как может быть устроен *энтропийный профиль* $(H(\alpha), H(\beta), H(\alpha, \beta))$.

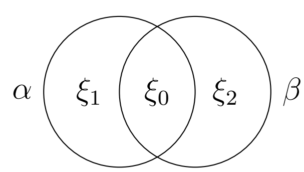
Утверждение 4.2. *Для любых чисел $h_1, h_2, h_{12} \geq 0$, которые удовлетворяют следующим соотношениям*

$$\begin{cases} h_{12} \leq h_1 + h_2 & \iff \quad t_0 = I(\alpha : \beta) \geq 0, \\ h_2 \leq h_{12} & \iff \quad t_1 = H(\alpha \mid \beta) \geq 0, \\ h_1 \leq h_{12} & \iff \quad t_2 = H(\beta \mid \alpha) \geq 0. \end{cases}$$

существует пара случайных величин (α, β) с энтропийным профилем (h_1, h_2, h_{12}).

Доказательство. Пусть ξ_0, ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины с энтропиями t_0, t_1, t_2 соответственно. Тогда $\alpha = (\xi_0, \xi_1)$ и $\beta = (\xi_0, \xi_2)$ будут искомыми величинами.

$$\begin{cases} H(\xi_0) = t_0 = h_1 + h_2 - h_{12}, \\ H(\xi_1) = t_1 = h_{12} - h_2, \\ H(\xi_2) = t_2 = h_{12} - h_1. \end{cases}$$



□

Давайте попробуем разобраться с аналогичным вопросом для троек случайных величин. Энтропийный профиль для тройки (α, β, γ) будет задаваться 7 числами:

$$\big(H(\alpha), H(\beta), H(\gamma), H(\alpha,\beta), H(\alpha,\gamma), H(\beta,\gamma), H(\alpha,\beta,\gamma)\big).$$

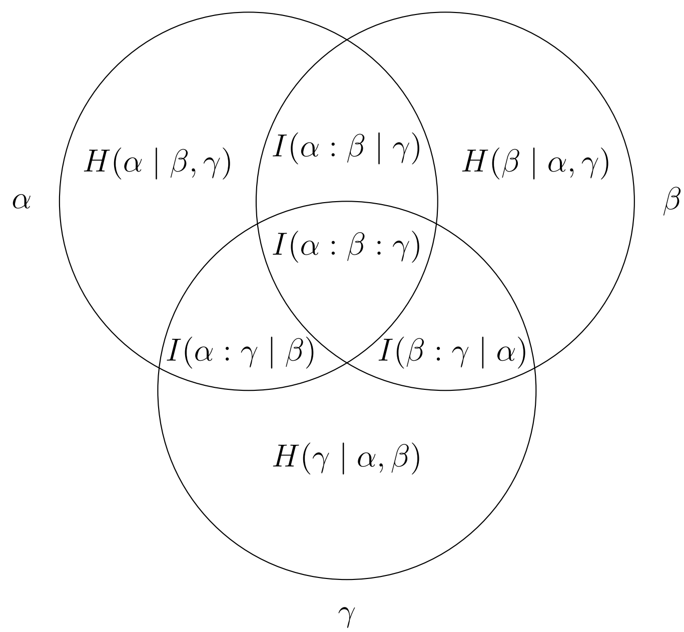
Для случайных величин (α, β, γ) можно записать 9 независимых неравенств.

$$\begin{array}{lll} H(\alpha \mid \beta,\gamma) \geq 0, & I(\alpha : \beta) \geq 0, & I(\alpha : \beta \mid \gamma) \geq 0, \\ H(\beta \mid \gamma,\alpha) \geq 0, & I(\beta : \gamma) \geq 0, & I(\beta : \gamma \mid \alpha) \geq 0, \\ H(\gamma \mid \alpha,\beta) \geq 0, & I(\gamma : \alpha) \geq 0, & I(\gamma : \alpha \mid \beta) \geq 0. \end{array}$$

Определение 4.1. Определим общую информацию трёх случайных величин

$$I(\alpha : \beta : \gamma) = I(\alpha : \beta) - I(\alpha : \beta \mid \gamma).$$

Соотношения на информационные величины имеют удобную геометрическую интерпретацию. Давайте нарисуем три круга Эйлера и сопоставим площади каждой из получившихся замкнутых области некоторую информационную величину.



Мы можем проверить, что в результате получится корректное представление. Так, например, площадь круга α будет соответствовать

$$H(\alpha) = H(\alpha \mid \beta,\gamma) + I(\alpha : \beta \mid \gamma) + I(\alpha : \gamma \mid \beta) + I(\alpha : \beta : \gamma),$$

а пересечение кругов α и β

$$I(\alpha : \beta) = I(\alpha : \beta \mid \gamma) + I(\alpha : \beta : \gamma).$$

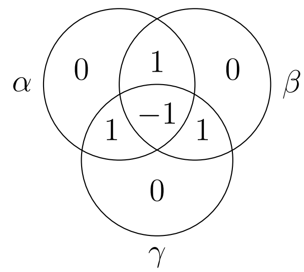
В дальнейшем мы будем использовать эту геометрической интерпретацию для доказательства соотношений на информационные величины.

Утверждение 4.3. *Общая информация трёх случайных величин может быть отрицательной.*

Доказательство. Пусть α и β будут независимыми равномерно распределёнными на $\{0,1\}$ случайными величинами. Случайная величина γ будет принимать значение из $\{0,1\}$ в соответствии со следующим соотношением:

$$\alpha \oplus \beta \oplus \gamma = 0.$$

Мы получим следующую картину:

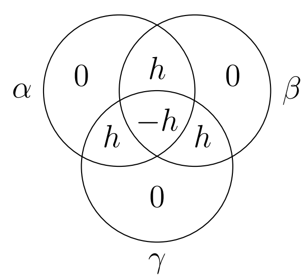


$\square$

Утверждение 4.4. *Других неравенств для троек нет.*

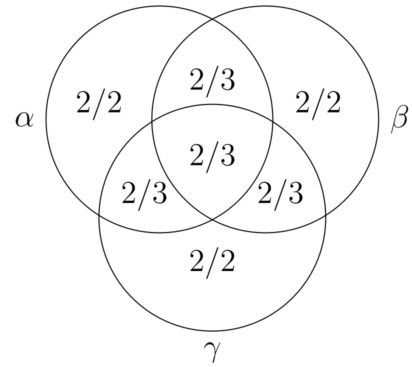
Утверждение 4.5. *Есть профили, которые не реализуются никакими распределениями, но их мера 0.*

Упражнение 4.1. Доказать, что следующий профиль реализуется только при $h = \log n$ для некоторого целого n.



Утверждение 4.6. $2H(\alpha,\beta,\gamma) \le H(\alpha,\beta) + H(\alpha,\gamma) + H(\beta,\gamma)$.

Доказательство. Отметим сколько раз каждая область входит в левую/в правую часть неравенства.



Таким образом утверждение упрощается до $0 \leq I(\beta : \gamma) + I(\alpha : \beta \mid \gamma) + I(\alpha : \gamma \mid \beta)$. $\square$

Следствие 4.1 (Теорема 1.3)**.** *Для* $A \subset \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \times \{0,1\}^*$

$$2\chi(A) \leq \chi_{12}(A) + \chi_{13}(A) + \chi_{23}(A).$$

Доказательство. Пусть (α, β, γ) равномерно распределены на A (т.е. случайные величины — это координаты точек в множестве A).

$$2\chi(A) = 2H(\alpha, \beta, \gamma) \leq \underbrace{H(\alpha, \beta)}_{\leq \chi_{12}(A)} + \underbrace{H(\alpha, \gamma)}_{\leq \chi_{13}(A)} + \underbrace{H(\beta, \gamma)}_{\leq \chi_{23}(A)}.$$

$\square$

Можно рассмотреть обобщение этой теоремы на произвольное число координат.

Теорема 4.1 (Лемма Ширера)**.** *Пусть X — случайная величина, распределённая на $\{0,1\}^n$. Для любого распределения S на подмножествах $[n]$, при котором $\Pr[i \in S] \geq \mu$, выполняется $\mathbb{E}[H(X_S)] \geq \mu \cdot H(X)$.*

Доказательство. Для любого множества $T = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset [n]$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ выполняется

$$H(X_T) = H(X_{i_1}) + H(X_{i_2} \mid X_{i_1}) + \cdots + H(X_{i_k} \mid X_{i_1}, \ldots, X_{i_{k-1}}).$$

Воспользуемся тем, что $H(X_{i_t} \mid X_{i_1}, \ldots, X_{i_{t-1}}) \geq H(X_{i_t} \mid X_{<i_t})$, тогда

$$H(X_T) \geq H(X_{i_1} \mid X_{<i_1}) + H(X_{i_2} \mid X_{<i_2}) + \cdots + H(X_{i_k} \mid X_{<i_k}).$$

Теперь применим этот факт к распределению S.

$$\begin{aligned}\mathop{\mathbb{E}}_S[H(X_S)] &\geq \mathop{\mathbb{E}}_S\left[\sum_{i \in S} H(X_i \mid X_{<i})\right] = \sum_{i \in [n]} \Pr[i \in S] \cdot H(X_i \mid X_{<i}) \\ &\geq \mu \sum_{i \in [n]} H(X_i \mid X_{<i}) = \mu \cdot H(X).\end{aligned}$$

$\square$

У леммы Ширера имеется множество применений.

Пример 4.1 (Подсчёт треугольников в графе). Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф с t треугольниками, и пусть $\ell = |E|$. Покажем, что $t \leq (2\ell)^{3/2}/6$.

Доказательство. Пусть тройка случайных величин (α, β, γ) равномерно распределена на вершинах треугольников, и пусть $X = (\alpha, \beta, \gamma)$. Тогда $H(X) = H(\alpha, \beta, \gamma) = \log(6t)$, т.к. каждый треугольник случается шестью различными перестановками. Рассмотрим распределение S, равномерное на подмножествах $\{1, 2, 3\}$ размера 2. Тогда $\Pr[i \in S] = 2/3$. По лемме Ширера

$$\mathop{\mathbb{E}}_{S}[H(X_S)] \geq \frac{2}{3}\log(6t),$$

т.е. существует $T \subset \{1, 2, 3\}$, для которого $H(X_T) \geq \frac{2}{3}\log(6t)$. С другой стороны X_T — это распределение на рёбрах графа, то есть $\log(2\ell) \geq H(X_T)$. Из этого получаем, что $2\ell \geq (6t)^{2/3}$. □

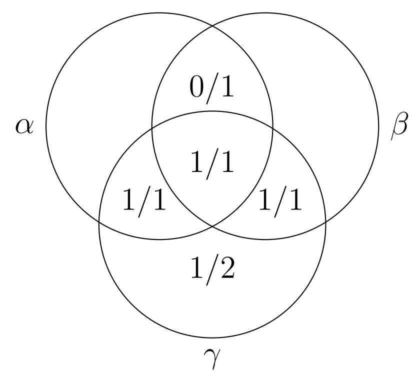
Обобщение для вложения произвольных графов см. в [10].

Утверждение 4.7. *Для любых α, β и γ выполняется следующее неравенство*

$$H(\gamma) \leq H(\gamma \mid \alpha) + H(\gamma \mid \beta) + I(\alpha : \beta).$$

Если $H(\gamma \mid \alpha) = H(\gamma \mid \beta) = 0$ (т.е. γ однозначно определяется и по α и по β), то $H(\gamma) \leq I(\alpha : \beta)$.

Доказательство. Отметим сколько раз каждая область входит в левую/в правую часть неравенства.

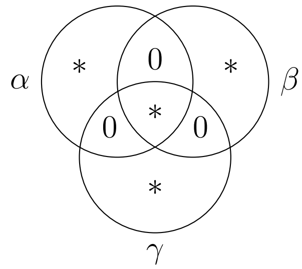


Таким образом неравенство упрощается до $0 \leq H(\gamma \mid \alpha, \beta) + I(\alpha : \beta \mid \gamma)$. □

Упражнение 4.2. Пусть $\alpha \to \beta \to \gamma$ образуют Марковскую цепь, т.е. распределение $\langle \gamma \mid \beta \rangle = \langle \gamma \mid \alpha, \beta \rangle$. Докажите, что $I(\alpha : \gamma) \leq I(\alpha : \beta)$ и $I(\alpha : \gamma) \leq I(\beta : \gamma)$.

Упражнение 4.3. Пусть $\alpha \to \beta \to \gamma \to \delta$ образуют Марковскую цепь. Докажите, что $I(\alpha : \beta) \leq I(\beta : \gamma)$.

Упражнение 4.4. Пусть α, β и γ имеют следующий профиль.



Докажите, что существует случайная величина δ, такая что

$$\begin{cases} H(\delta \mid \alpha) = 0, \\ H(\delta \mid \beta) = 0, \\ H(\delta \mid \gamma) = 0, \\ H(\delta) = I(\alpha : \beta : \gamma). \end{cases}$$

И при этом $I(\alpha : \beta \mid \delta) = I(\alpha : \gamma \mid \delta) = I(\beta : \gamma \mid \delta) = 0$.

Упражнение 4.5. Возьмём в качестве x, y, a, b случайные величины из предыдущего упражнения: $x = \alpha$, $y = \beta$, $a = \gamma$, $b = \delta$. Покажите, что для любых таких (a, b, x, y) из условия $I(x : y \mid a) = I(x : a \mid y) = I(y : a \mid x) = 0$ следует

$$I(a : b) \leq I(a : b \mid x) + I(a : b \mid y) + I(x : y).$$

[Указание: примените неравенство из утверждения 4.7.]

Упражнение 4.6. Возьмём в качестве x, y, a, b случайные величины из упражнения 4.4: $x = \alpha$, $y = \beta$, $a = \gamma$, $b = \delta$. Покажите, что существуют такие (a, b, x, y), для которых

$$I(a : b) \not\leq I(a : b \mid x) + I(a : b \mid y) + I(x : y).$$

(Т.е. условие в предыдущем упражнении было необходимо.)

Утверждение 4.8 (Неравенство для 5 случайных величин)**.**

$$I(a : b) \leq I(a : b \mid x) + I(a : b \mid y) + I(x : y) + I(a : b \mid z) + I(a : z \mid b) + I(b : z \mid a).$$

Следствие 4.2 (Zhang, Yeung, 1998)**.** *Неравенство для 4 случайных величин, которое не выражается через базисные неравенства.*

$$I(a : b) \leq 2I(a : b \mid x) + I(a : b \mid y) + I(x : y) + I(a : x \mid b) + I(b : x \mid a).$$

Утверждение 4.9. *Для 4 случайных величин существует бесконечно много неравенств, которые независимы в совокупности.*

4.2. Неравенства о тройках

Будем в различных предположениях доказывать следующее утверждение

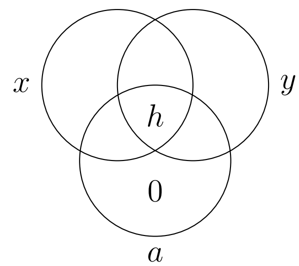
$$H(a \mid x) + H(a \mid y) \le H(a).$$

Утверждение 4.10. *Если a, x, y такие, что*

$$\begin{cases} H(a \mid y, x) = 0, \\ I(x : y \mid a) = 0. \end{cases}$$

то $H(a \mid x) + H(a \mid y) \le H(a)$.

Доказательство. Получается, что нам нужно доказать неотрицательность h.



Т.к. $I(x : y \mid a) = 0$, то $h = I(x : y) \ge 0$. $\square$

Утверждение 4.11. *Если a, x, y такие, что $H(a \mid y, x) = 0$ и*

$$\begin{cases} A_i \sim X_j \\ A_i \sim Y_k \end{cases} \implies A_i \sim (X_j, Y_k),$$

то $H(a \mid x) + H(a \mid y) \le H(a)$. (Обозначение $A_i \sim X_j \iff \Pr[a = A_i \wedge x = X_j] > 0$.)

Замечание 4.1. Условие $H(a \mid x, y) = 0$ можно интерпретировать так: $a = f(x, y)$.

Доказательство. Построим новое распределение (a', x', y'):

- a' имеет то же распределение, что и a,
- условное распределение x' при условии a' совпадает с условным распределением x при условии a,
- условное распределение y' при условии a' совпадает с условным распределением y при условии a,
- x' и y' независимы.

$$\Pr[a' = A_i, x' = X_j, y' = Y_k] = \Pr[a' = A_i] \cdot \Pr[x' = X_j \mid a' = A_i] \cdot \Pr[y' = Y_k \mid a' = A_i].$$

Таким образом

$$H(a', x', y') = H(a') + H(x' \mid a') + H(y' \mid a') - \underbrace{I(x' : y' \mid a')}_{0}.$$

С другой стороны

$$H(a', x', y') \leq H(x') + H(y') + H(a' \mid x', y').$$

Кроме того, мы может стереть штрихи почти везде.

$$H(x) + H(y) + H(a' \mid x', y') \geq H(a', x', y') = H(a) + H(x \mid a) + H(y \mid a).$$

Покажем, что $H(a' \mid x', y') = 0$, т.е. $a' = f(x', y')$. Действительно: если тройка (A_i, X_j, Y_k) в новом распределении встречается с положительной вероятностью, то и в исходном распределении она так же встречалась с положительной вероятностью, следовательно $a' = f(x', y')$. Получаем: $H(a) + H(x \mid a) + H(y \mid a) \leq H(x) + H(y)$. Прибавим $H(a)$ к обеим частям неравенства:

$$H(x, a) + H(y, a) \leq H(x) + H(y) + H(a) \implies H(a \mid x) + H(a \mid y) \leq H(a).$$

□

Задача 4.1 (Верещагин,[8]). Рассмотрим двудольный граф с вершинами (L, R) с цветными рёбрами. Все рёбра инцидентные одной вершине разноцветные, степень в левой доле не меньше n, в правой — не меньше m. Пусть известно, что для пары вершин $(x \in L, y \in R)$ есть не более одного общего цвета. Докажите, что количество цветов хотя бы $n \cdot m$.

Заметим, что одноцветные рёбра образуют паросочетания. Для каждого цвета c соединим все согласованные с c вершины слева с согласованными с c вершинами справа. Получим биклику из рёбер цвета c.

Рассмотрим распределение на тройках (a, x, y) (цвет, вершина из левой доли, вершина из правой доли): выбираем цвет пропорционально размеру (количеству рёбер) соответствующей биклики и выбираем случайное ребро этого цвета. Можно проверить, что выполняется следующее соотношение:

$$\begin{cases} A_i \sim X_j, \\ A_i \sim Y_k, \end{cases} \implies A_i \sim (X_j, Y_k).$$

Теперь применим: $\underbrace{H(a \mid x)}_{\geq \log n} + \underbrace{H(a \mid y)}_{\geq \log m} \leq H(a) \leq \log(\#\text{ цветов})$.

Упражнение 4.7. Прямоугольная таблица разбита на (комбинаторные) прямоугольники таким образом, что каждая строка пересекает не менее n прямоугольников, а каждый столбец — не менее m прямоугольников. Докажите, что общее число прямоугольников не менее nm.

4.3. Условное неравенство о четвёрке

Утверждение 4.12. *Если для случайных величин a, b, x, y выполняется*

$$\begin{cases} I(x : y \mid a) = 0, \\ H(a \mid x, y) = 0, \end{cases}$$

то $I(a : b) \leq I(a : b \mid x) + I(a : b \mid y) + I(x : y)$.

Доказательство. Построим новое распределение (a', b', x', y'): сначала выберем значение $(a', b') \sim (a, b)$. При фиксированном значении (a', b') выбираем независимо x' и y' так, чтобы условные распределения вероятностей относительно a' были такими же, как у x и y относительно a.

$$\begin{aligned} H(a', b', x', y') = H(a', b') + H(x \mid a', b') + H(y \mid a', b') - \underbrace{I(x' : y' \mid a', b')}_{0} = \\ = H(a, b) + H(x \mid a, b) + H(y \mid a, b). \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} H(a', b', x', y') \leq H(b') + H(x' \mid b') + H(y' \mid b') + H(a' \mid x', y') = \\ = H(b) + H(x \mid b) + H(y \mid b) + H(a' \mid x', y'). \end{aligned}$$

Покажем, что $H(a' \mid x', y') = 0$. В исходном распределении это выполнялось по условию. Пусть $[a' = A_i, x' = X_j, y' = Y_k]$ в новом распределении случается с положительной вероятностью. Следовательно и в исходном распределении это случается с положительной вероятностью (при фиксированном a' величины x' и y' независимы), а значит сохраняется соответствующее свойство функциональной зависимости a' от (x', y').

В результате получаем

$$H(a, b) + H(x \mid a, b) + H(y \mid a, b) \leq H(b) + H(x \mid b) + H(y \mid b).$$

Распишем это неравенство в безусловных энтропиях:

$$H(a, b) + H(x, a, b) - H(a, b) + H(y, a, b) - H(a, b) \leq H(b) + H(x, b) - H(b) + H(y, b) - H(b).$$

Упрощаем и получаем:

$$H(x, a, b) + H(y, a, b) + H(b) \leq H(x, b) + H(y, b) + H(a, b). \tag{3}$$

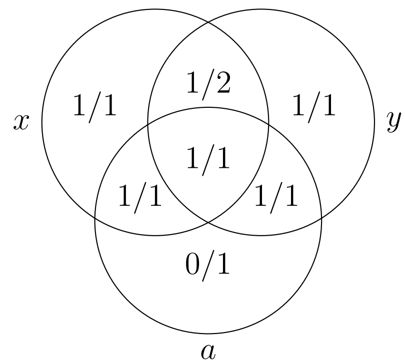
Проделаем то же самое с $I(a : b) \leq I(a : b \mid x) + I(a : b \mid y) + I(x : y)$.

$$\begin{aligned} H(a) + H(b) - H(a, b) \leq \quad & H(a, x) + H(b, x) - H(a, b, x) - H(x) + \\ & H(a, y) + H(b, y) - H(a, b, y) - H(y) + \\ & H(x) + H(y) - H(x, y). \end{aligned}$$

Упрощаем и получаем:

$$H(a,b,x)+H(a,b,y)+H(b)+H(x,y) \leq \begin{array}{l} H(b,x)+H(b,y)+H(a,b)+ \\ H(a,x)+H(a,y)-H(a). \end{array} \tag{4}$$

Заметим, что нам осталось доказать лишь $H(x,y) \leq H(a)+H(x \mid a)+H(y \mid a)$. Сложив это неравенство с (3) мы получим (4). Отметим сколько раз каждая область входит в левую/в правую часть неравенства.



Т.е. оно эквивалентно $H(a \mid x,y)+I(x:y \mid a) \geq 0$. $\square$

Вопросы на подумать. Придумать интерпретацию для этого неравенства. Zhang и Yeung в 97 году доказали это же неравенство в предположении $I(x:y)=I(x:y \mid a)=0$. Есть ли комбинаторная интерпретация у этого утверждения?

5. Криптография

5.1. Шифрования с закрытым ключом

Рассмотрим задачу кодирования сообщения при помощи симметричного шифрования. Будем считать, что вычислительные ресурсы противника неограниченны. Предположим, что мы шифруем сообщение m с ключом шифрования k. При шифровании сообщения мы получаем *шифрограмму* $c=E(k,m)$. Получатель шифрограммы тоже знает ключ k и может узнать исходное сообщение $m=D(k,c)$.

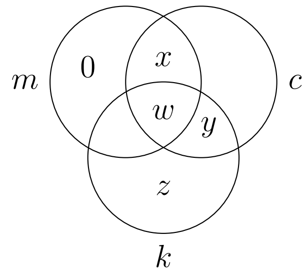
Будем предполагать, что m и k являются случайными величинами. Противник не знает m и k, но знает c. Для *совершенной* схемы шифрования должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{cases} H(c \mid k,m)=0, \\ H(m \mid k,c)=0, \\ I(c:m)=0. \end{cases}$$

Теорема 5.1 (Шеннон). *$H(k) \geq H(m)$, даже если условие $H(c \mid k,m)=0$ нарушается (т.е. алгоритм E использует случайные биты).*

Замечание 5.1. Одноразовый блокнот (one-time notepad) обладает этим свойством.

Доказательство. По условию $x + w = 0$, т.е. $x = -w$.



Т.к. взаимная информация неотрицательна, то $w + y \geq 0$, т.е. $y \geq -w = x$. Теперь из $y \geq x$ и $z \geq 0$ следует $H(k) \geq H(m)$. $\square$

5.2. Схемы разделения секрета

Пусть у нас есть некоторый секрет S_0 и n участников и мы хотим разделить между ними этот секрет так, чтобы они могли им воспользоваться только все вместе, а любое подмножество участников — не могло.

Определение 5.1. *Совершенная схема разделения секрета* — это совместное распределение вероятностей $(S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n)$, такое что

$$\begin{cases} H(S_0 \mid S_1, S_2, \ldots, S_n) = 0, \\ H(S_0 \mid S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}) = H(S_0), \quad k < n. \end{cases}$$

Второе условие можно переписать как $I(S_0 : S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}) = 0$.

Для совершенной схемы разделения секрета есть простая конструкция. Будем считать, что S_0 записан (закодирован) при помощи ℓ бит. Выберем независимо и равномерно $S_1, \ldots, S_{n-1} \in \{0,1\}^\ell$. S_n определяется из условия $S_0 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_n = \vec{0}$ (покоординатная сумма по модулю 2).

Утверждение 5.1. *Предложенная схема разделения секрета является совершенной.*

Определение 5.2. *Пороговая совершенная схема разделения секрета* — это совместное распределение вероятностей $(S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n)$, такое что

$$\begin{cases} H(S_0 \mid S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_t}) = 0, \\ H(S_0 \mid S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}) = H(S_0), \quad k < t. \end{cases}$$

Пороговая схема Шамира. Будем считать, что секрет S_0 — это элемент некоторого конечного поля $\mathbb{F}_q$. Выберем случайный многочлен p над полем $\mathbb{F}_q$ степени не более $t-1$: выберем $t-1$ коэффициент независимо и равномерно, а последний (свободный) коэффициент определим из соотношения $p(0) = S_0$. Выберем произвольным образом и сообщим всем участникам некоторый набор различных ненулевых элементов поля $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{F}_q$ и вычислим секреты участников как значение полинома в соответствующих точках $S_i = p(a_i)$. Теперь любые t участником могут собраться, воспользоваться формулой для интерполяции многочлена и вычислить $S_0 = p(0)$. Если же соберётся меньше участников, то у них не будет никакой информации об S_0.

Утверждение 5.2. *Пороговая схема Шамира является совершенной.*

Доказательство. Любой полином степени меньше $t-1$ можно дополнить до полинома большей степени с любым значением в точке 0. □

Определение 5.3. *Совершенная схема разделения секрета для структуры доступа* $\Gamma \subset 2^{[n]}$ (Γ должно быть замкнуто вверх) — это совместное распределение вероятностей $(S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n)$, такое что

$$\begin{cases} H(S_0 \mid S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_m}) = 0, & \{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \in \Gamma, \\ H(S_0 \mid S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_m}) = H(S_0), & \{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \notin \Gamma. \end{cases}$$

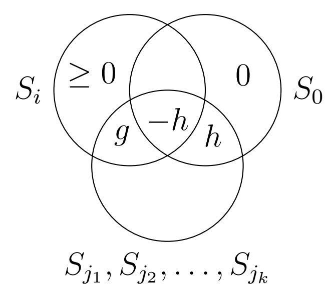
Определение 5.4. *Идеальная схема разделения секрета* — это совершенная схема разделения секрета с дополнительным требованием „экономности“.

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ H(S_i) \leq H(S_0).$$

Утверждение 5.3. *Если участник i является* существенным *в структуре доступа* Γ *(т.е. существует такое $s \in \Gamma$, что $s \setminus \{i\} \notin \Gamma$), то $H(S_i) \geq H(S_0)$.*

Замечание 5.2. Схема Шамира является идеальной.

Доказательство. Пусть $s = \{i, j_1, j_2, \ldots, j_k\} \in \Gamma$, а $s \setminus \{i\} \notin \Gamma$. Обозначим взаимную информацию $I(S_0 : S_{j_1}, S_{j_2}, \ldots, S_{j_k} \mid S_i)$ за h, а $I(S_i : S_{j_1}, S_{j_2}, \ldots, S_{j_k} \mid S_0)$ за g. Из условия $I(S_0 : S_{j_1}, S_{j_2}, \ldots, S_{j_k}) = 0$ получаем, что $I(S_0 : S_i : S_{j_1}, S_{j_2}, \ldots, S_{j_k}) = -h$, аналогичным образом из $I(S_i : S_{j_1}, S_{j_2}, \ldots, S_{j_k}) \geq 0$ получаем, что $g \geq h$.



Таким образом $H(S_i) \geq H(S_0)$. □

Замечание 5.3. Это утверждение показывает, что не бывает более „экономной“ схемы разделения секрета, чем идеальная.

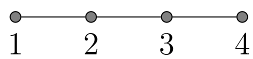
Утверждение 5.4. *Для любой системы доступа* Γ *существует совершенная схема разделения секрета.*

Доказательство. Давайте для каждого подмножества $A = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \in \Gamma$ создадим собственный набор секретов $S^A_{i_1}, S^A_{i_2}, \dots, S^A_{i_k}$: $S^A_{i_1} \oplus S^A_{i_2} \oplus \dots \oplus S^A_{i_k} = S_0$. (Достаточно рассматривать только минимальные множества A.) □

Замечание 5.4. Предложенная схема не является идеальной.

Утверждение 5.5. *Существуют структуры доступа, для которых не существует идеальной схемы разделения секрета.*

Доказательство. Рассмотрим структуру доступа, заданную следующим графом (рёбра соответствуют авторизованным множествам).

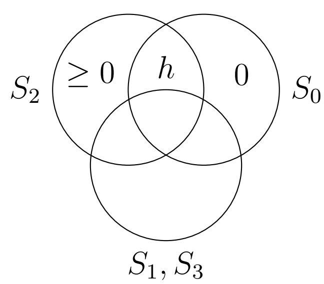


Покажем, что для этой структуры доступа $H(S_2) + H(S_3) \geq 3H(S_0)$, другими словами $\max_i \frac{H(S_i)}{H(S_0)} \geq 3/2$.

Для доказательства нам потребуются три леммы. Будем обозначать $h = H(S_0)$.

Лемма 5.1. $H(S_2 \mid S_1, S_3) \geq h$.

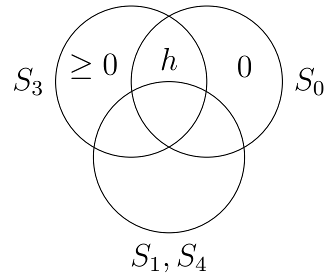
Доказательство. Второй участник может восстановить секрет, воспользовавшись либо секретом первого или секретом третьего участника, т.е. $I(S_2 : S_0 \mid S_1, S_3) = h$.



Таким образом $H(S_2 \mid S_1, S_3) \geq I(S_2 : S_0 \mid S_1, S_3) = h$. □

Лемма 5.2. $H(S_3 \mid S_1) \geq h$.

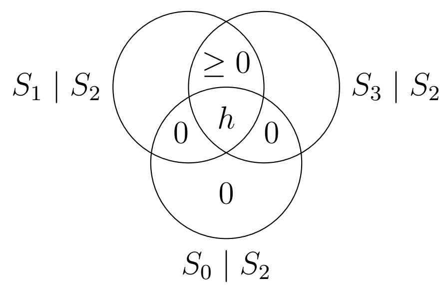
Доказательство. Аналогично предыдущей лемме получаем, что $H(S_3 \mid S_1, S_4) \geq h$, и как следствие $H(S_3 \mid S_1) \geq h$.



$\square$

Лемма 5.3. *$I(S_1 : S_3 \mid S_2) \geq h$.*

Доказательство. Следующую схему следует интерпретировать как энтропия при условии S_2.



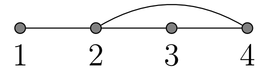
Заметим, что $I(S_1 : S_0 \mid S_2) = h$ и $I(S_3 : S_0 \mid S_2) = h$ в то время, как $I(S_1 : S_0 \mid S_2, S_3) = 0$ и $I(S_3 : S_0 \mid S_1, S_2) = 0$. Т.е. $I(S_1 : S_3 : S_0 \mid S_2) = h$, следовательно $I(S_1 : S_3 \mid S_2) \geq h$. $\square$

Теперь осталось сложить результаты трёх лемм:

$$H(S_2)+H(S_3) \geq H(S_2, S_3) = H(S_2 \mid S_1, S_3)+H(S_3 \mid S_1)+I(S_1 : S_3 \mid S_2)+I(S_2 : S_1) \geq 3h.$$

$\square$

Упражнение 5.1. Доказать, что для любой схемы разделения секреты для этой структуры $\max_i \frac{H(S_i)}{H(S_0)} \geq 3/2$.



Теорема 5.2 (Csirmaz'94)**.** *Существуют такие структуры доступа Γ на n участниках, что для любой схемы разделения секрета $\max_i \frac{H(S_i)}{H(S_0)} \geq \Omega(n/\log n)$.*

Доказательство. Выберем n и k такие, что $n = 2^k + k - 1$, и два множества участников

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{2^k-1}\}.$$

Для определения структуры доступа нам потребуются два семейства множеств. Пусть $\{A_0, A_1, A_2, \dots, A_{2^k-1}\}$ — это все подмножества A, причём $A_0 = A$ и для любых $i < j$ выполняется $A_i \not\subseteq A_j$ (например, можно их упорядочить по уменьшению размера). Построим множества $\{B_0, B_1, B_2, \dots, B_{2^k-1}\}$ следующим образом: $B_0 = \emptyset$, $B_i = \{b_1, b_2, \dots, b_i\}$. Теперь мы готовы определить структуру доступа Γ: $\Gamma = \{U_i\}_{i=0}^{2^k-1}$, где $U_i = A_i \cup B_i$.

Как и в предыдущих утверждениях обозначим $H(S_0)$ за h. В дальнейших рассуждениях мы будем использовать следующую нотацию: под энтропией некоторого множества участников $X = \{x_1, x_2, \dots, x_t\} \subset A \cup B$, мы будем понимать энтропию секретов, которые принадлежат участникам этого множества, т.е. $H(X) = H(S_{x_1}, S_{x_2}, \dots, S_{x_t})$.

Лемма 5.4. *Для* $i = \{0, 1, 2, \dots, 2^k - 2\}$

$$H(A \cup B_i) - H(B_i) \geq H(A \cup B_{i+1}) - H(B_{i+1}) + h.$$

Из этой леммы следует, что

$$\begin{aligned} H(A) = H(A \cup B_0) - H(B_0) \geq H(A \cup B_1) - H(B_1) + h \geq \dots \geq \\ \geq \underbrace{H(A \cup B_{2^k-1}) - H(B_{2^k-1})}_{\geq 0} + (2^k - 1) \cdot h. \end{aligned}$$

Получаем, что $H(A) = H(S_{a_1}, S_{a_2}, \dots, S_{a_k}) \geq (2^k - 1) \cdot h$. Следовательно есть i такое, что $H(S_{a_i}) \geq \frac{2^k-1}{k} \cdot h$. Вспомним, что мы выбрали $n = 2^k + k - 1$, т.е. $H(S_{a_i}) \geq \Omega(n/\log n) \cdot h$. Осталось доказать лемму.

Доказательство леммы 5.4. Докажем два неравенства:

1. $H(A_{i+1} \cup B_i) + H(B_{i+1}) \geq H(A_{i+1} \cup B_{i+1}) + H(B_i)$.

2. $H(A \cup B_i) + H(A_{i+1} \cup B_{i+1}) \geq H(A \cup B_{i+1}) + H(A_{i+1} \cup B_i) + h$.

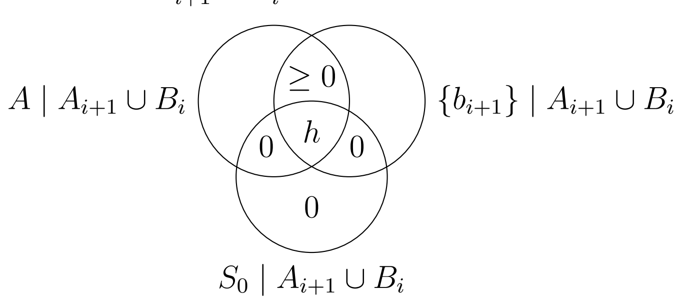
Заметим, что если сложить эти два неравенства, то мы получим утверждение леммы.

Первое неравенства говорит о неотрицательности условной совместной информации. Действительно, давайте вспомним формулу для условной совместной информации:

$$I(x : y \mid z) \geq 0 \iff H(x, z) + H(y, z) \geq H(x, y, z) + H(z).$$

Таким образом первое неравенство утверждает $I(A_{i+1} : \{b_{i+1}\} \mid B_i) \geq 0$.

Аналогично второе неравенство утверждает, $I(A : \{b_{i+1}\} \mid A_{i+1} \cup B_i) \geq h$. Доказательство этого утверждения аналогично лемме 5.3 — нужно рассмотреть условное распределение при известном $A_{i+1} \cup B_i$.



□

Эта лемма завершает доказательство теоремы. □

Замечание 5.5. Нижние оценки на избыточную сложность совершенных схем разделения секрета влекут нижние оценки на схемную сложность монотонных функций.

6. Коммуникационная сложность

Пусть X, Y и Z — это три конечных множества, и пусть задана некоторая функция $f : X \times Y \to Z$. Два игрока, будем называть их Алиса и Боб, решают *коммуникационную задачу для функции* f, если:

1. множества X, Y, Z и функция f известны обоим игрокам,
2. Алиса знает некоторое $x \in X$,
3. Боб знает некоторое $y \in Y$,
4. Алиса и Боб стремятся вычислить $f(x, y)$.

Для решения этой коммуникационной задачи Алиса и Боб могут пересылать друг другу сообщения. Задача считается решённой, если оба игрока знают $f(x, y)$. Нас интересует минимальное количество битов, которое необходимо и достаточно переслать для вычисления $f(x, y)$.

Определение 6.1. *Коммуникационный протокол* для функции $f : X \times Y \to Z$ — это корневое двоичное дерево, которое описывает совместное вычисление Алисой и Бобом функции f. В этом дереве каждая внутренняя вершина v помечена меткой А или Б, означающей очередь хода Алисы или Боба соответственно. Для каждой вершины, помеченной А, определена функция $g_v : X \to \{0, 1\}$, которая говорит Алисе, какой бит нужно послать, если вычисление находится в этой вершине. Аналогично, для каждой вершины v с пометкой Б определена функция $h_v : Y \to \{0, 1\}$, которая определяет бит, который Боб должен отослать в этой вершине. Каждая внутренняя вершина имеет двух потомков, ребро к первому потомку помечено 0, а ребро ко второму потомку помечено 1. Каждый лист помечен значением из множества Z.

Вычисление по такому протоколу на конкретной паре входов (x, y) устроено так: изначально вычисление находится в корне. В каждой внутренней вершине v в зависимости от пометки либо Алиса, либо Боб пересылают один бит (он определяется соответствующей функцией g_v или h_v). После этого вычисление переходит в один из потомков вершины v по ребру, пометка которого совпадает с битом, переданным в вершине v. Когда вычисление приходит в лист, то оно завершается. Результат вычисления — это пометка в листе.

Будем говорить, что коммуникационный протокол *вычисляет функцию* f, если для всех пар $(x, y) \in X \times Y$ вычисление приходит в лист с пометкой $f(x, y)$. Теперь можно дать формальное определение *коммуникационной сложности функции* f.

Аналогичным образом можно определить *коммуникационный протокол, вычисляющий отношение* $R \subset (X \times Y) \times Z$ — нужно только дополнительно потребовать, чтобы ответы Алисы и Боба были согласованы.

Определение 6.2. *Коммуникационная сложность* функции f определяется как наименьшая глубина протокола (максимальная рёберная длина пути от корня до листа), вычисляющего функцию f. Обозначается $D(f)$.

Утверждение 6.1. *Для любой* $f : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, $D(f) \leq n + 1$.

Доказательство. Алиса посылает Бобу свой вход, а Боб посылает Алисе значение f. □

Пример 6.1. Примеры функций с нетривиальной верхней оценкой на коммуникационную сложность.

1. (Pointer Chaising) $D(\mathrm{PC}) \leq k \log n$, где $PC(x, y) = \underbrace{x(y(x(y(x(y(x(y(x}_{k \text{ раундов}}(0))))))))).$

   У игроков есть двудольный ориентированный граф на $2n$ вершинах, у которого исходящая степень каждой вершины равна 1. Алиса знает левую долю, Боб — правую. В начале они кладут фишку на вершину с номером 0 из доли Алисы и начинают передвигать её по рёбрам. Всего они должны сделать k переходов по рёбрам графа. Ответ — номер финальной вершины.

2. $D(\mathrm{MED}) = O(\log^2 n)$, где x и y интерпретируются как характеристические функции подмножеств $[n]$, а $\mathrm{MED}(x, y)$ — медиана их объединения. (Можно показать, что $D(\mathrm{MED}) = \Theta(\log n)$.)

3. $D(CIS_G) = O(\log^2 n)$, где x интерпретируется как характеристическая функция некоторой клики в графе G, а y — как характеристическая функция некоторого независимого множества в графе G. $\mathrm{CIS}(x, y) = 1$, если клика и независимое множество имеют общую вершину. (Замечание: не известно графов G, для которых нельзя решить эту задачу за $O(\log n)$.)

6.1. Нижние оценки

Рассмотрим коммуникационный протокол для некоторой функции $f : X \times Y \to Z$. Для каждой вершины v определим множество $R_v \subset X \times Y$ — множество всех пар $(x, y) \in X \times Y$, для которых вычисление приходит в вершину v.

Утверждение 6.2. *Для всех вершин v множество R_v является комбинаторным прямоугольником, т.е. существуют такие $X_v \subset X$ и $Y_v \subset Y$, что $R_v = X_v \times Y_v$.*

Доказательство. Покажем по индукции. Это верно для корня. Если это верно для какой-то вершины v с пометкой A: $R_v = X_v \times Y_v$. Если Алиса пересылает бит b и вычисление переходит в вершину u, то $R_u = X_u \times Y_u$, где $X_u = \{x \in X_v \mid g_v(x) = b\}$, а $Y_u = Y_v$. Аналогично, если Боб посылает бит b и вычисление переходит в вершину u, то $R_u = X_u \times Y_u$, где $X_u = X_v$, а $Y_u = \{y \in Y_v \mid h_v(y) = b\}$. □

Следствие 6.1. *Листья коммуникационного протокола для функции f задают разбиение множества $X \times Y$ на одноцветные прямоугольники.*

Будем обозначать $C^R(f)$ — минимальное количество *одноцветных* прямоугольников, покрывающих $X \times Y$.

Утверждение 6.3. $D(f) \geq \log C^R(f)$.

Доказательство. $D(f) \geq \log(\#\text{ листьев}) \geq \log C^R(f)$. □

Метод размера прямоугольников. Определим некоторую весовую функцию на элементах $X \times Y$. Тогда верна следующая оценка

$$C^R(f) \geq \frac{w(X \times Y)}{\max\limits_{\text{одноцв. } A \times B} w(A \times B)}.$$

Метод трудного множества (fooling set). Это частный случай метода размера прямоугольников, при котором фиксируется некоторое множество $F \subset X \times Y$, а $w(x, y)$ определяется следующим образом:

$$w(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in F, \\ 0, & (x, y) \notin F. \end{cases}$$

При этом никакой прямоугольник не содержит более одного элемента из F. Следовательно $C^R(f) \geq |F|$.

Метод ранга матрицы. Рассмотрим *матрицу функции* f — матрицу, в которой строки индексированы элементами X, столбцы — элементами Y, а в ячейке (x, y) стоит $f(x, y)$. Если мы рассмотрим эту матрицу функции как матрицу M над некоторым довольно большим полем, то можно показать, что $C^R(f) \geq \operatorname{rank} M$.

Упражнение 6.1. Докажите предыдущие утверждения.

Утверждение 6.4. $D(\mathrm{EQ}) = n + 1$, *где* $\mathrm{EQ}(x, y) = 1 \iff x = y$.

Утверждение 6.5. $D(\mathrm{GE}) = n + 1$, *где* $\mathrm{GE}(x, y) = 1 \iff x \geq y$.

6.2. Вероятностные протоколы

Можно рассмотреть коммуникационную игру, в которой у участников есть возможность использовать случайные биты. Можно формализовать это следующим образом: Алиса на вход получает пару (x, r), где $x \in X$, а r — случайная строка, аналогично, Боб получает пару (y, s), где $y \in Y$, а s — случайная строка. Функции g_v и h_v, записанные в вершинах протокола для такой игры, будут принимать два аргумента — вход и случайную строку, т.е. пересылаемые сообщения могут зависеть от случайных битов. Соответственно, результат игры будет зависеть от x, y, r, s.

Определение 6.3. Будем говорить, что вероятностный протокол ϵ-вычисляет f, если для любой пары x, y с вероятностью (по выбору (r, s)) не менее $1-\epsilon$ результат протокола равен $f(x, y)$ (с точки зрения обоих игроков). Через $R^\epsilon(f)$ обозначается минимальная высота вероятностного протокола ϵ-вычисляющего f.

Упражнение 6.2. Докажите, что $R^\epsilon(\mathrm{EQ}_n) = O(\log n + \log(1/\epsilon))$.

Упражнение 6.3. Докажите, что $R^\epsilon(\mathrm{GE}_n) = O(\log n(\log n + \log(1/\epsilon)))$.

Упражнение 6.4. Докажите, что если Алиса и Боб имеют доступ к общему источнику случайности (то есть $r = s$), то они могут ϵ-вычислить предикат EQ_n, передав $O(log(1/\epsilon))$ бит.

Упражнение 6.5. Докажите, что если Алиса и Боб имеют доступ к общему источнику случайности, то для любого фиксированного положительного ϵ они могут ϵ-вычислить предикат GE_n с ошибкой не более ϵ, передав $O(\log n)$ бит.

6.3. Связь протоколов и формул

Определение 6.4. *Игра Карчмера-Вигдерсона для функции* $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ — это следующая коммуникационная игра: Алиса получает $x \in f^{-1}(0)$, Боб получает $y \in f^{-1}(1)$, и они вместе пытаются найти такое $i \in [n]$, что $x_i \neq y_i$. Другими словами, игра Карчмера-Вигдерсона — это коммуникационная задача для *отношения*

$$R_f = \{((x, y), i) \mid x \in f^{-1}(0), y \in f^{-1}(1), x_i \neq y_i\}.$$

Отношение R_f будем называть *отношением Карчмера-Вигдерсона* для функции f.

Определение 6.5. *Формула в базисе Де Моргана для функции* $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ — это булевая формула с переменными $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, соответствующим отдельным битам входа f, и со связками $\{\wedge, \vee, \neg\}$, вычисляющая функцию f. Законы Де Моргана позволяют нам предполагать, что все $\neg$ находятся непосредственно перед переменными. Заметим, что структура формулы Де Моргана представляет собой корневое дерево (листья соответствуют переменным, а внутренние вершина — логическим связкам).

Будем называть *формульной сложностью* $L(f)$ функции $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ — это размер (количество вхождений переменных) минимальной формулы вычисляющей f. Если говорить более формально, то нужно говорить не о конкретной функции, а о последовательности функций.

Определение 6.6. Для функции $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ определим последовательность функций $\{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$, где $f_i : \{0,1\}^i \to \{0,1\}$ и $\forall x \in \{0,1\}^i, f(x) = f_i(x)$. Тогда формульная сложность $L(f)$ функции f ограничена $g(n)$, если для любого n существует формула ϕ_n размера не более $g(n)$, вычисляющая функцию f_n.

Теорема 6.1 (Шеннон)**.** *Существует* f*:* $L(f) = \Omega(2^n/n)$.

Доказательство. Пусть $n \geq 2$. Посчитаем количество формул размера не более s (здесь под размером формулы будем понимать количество вершин в дереве, соответствующем формуле). Пронумеруем вершины дерева по уровням от корня к листьям (корень будет иметь номер 1, потомки корня — номера 2 и 3, и т.д.). Теперь для каждой вершины в этом порядке запишем её краткое описание: для внутренних вершин описание будет операция в вершине (либо $\wedge$, либо $\vee$), для листьев с пометкой x_i запишем $(i, +)$, для листьев с пометкой $\neg x_i$ запишем $(i, -)$. В результате получится последовательность из s элементов, по которой можно восстановить исходную формулу. Различных последовательностей такого вида не более $(3n)^s$. В то же время число всех функций $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ровно 2^{2^n}. Каким должно быть s, чтобы количество различных формул было достаточным, чтобы вычислить все функции на n битах?

$$(3n)^s \geq 2^{2^n} \implies s \cdot \log(3n) \geq 2^n \implies s = \Omega(2^n/n).$$

Так как формула задаёт двоичное дерево, то количество вершин и количество листьев (количество вхождений переменных) отличаются только в два раза. □

Замечание 6.1. Этот подсчёт показывает, что существуют функции с экспоненциальной формульной сложностью. Более того, любая случайная функция с большой вероятностью имеет такую сложность. Однако не известно *явных* функций большой сложности. Лучшая известная на данный момент нижняя оценка на формульную сложность явной функции это $\Omega(n^3)$ (оценка для функции Андреева, доказана Хостадом).

Теорема 6.2 (Карчмер-Вигдерсон)**.** *Для каждой формулы ϕ вычисляющей f, существует такой протокол Π_ϕ для отношения Карчмера-Вигдерсона R_f, что его дерево совпадает с деревом, описывающим структуру формулы ϕ. Верно и обратное: если есть протокол для R_f, то есть и формула для f с такой же структурой.*

Доказательство. Ход Алисы будет соответствовать связке $\wedge$, ход Боба — связке $\vee$.

- **формула $\to$ протокол**
  Каждая внутренняя вершина протокола соответствует некоторой подформуле исходной формулы ϕ. Будем поддерживать следующий инвариант: пусть ϕ_v — подформула, соответствующая текущей вершине протокола v, тогда $\phi_v(x) = 0$, а $\phi_v(y) = 1$. Это верно для начальной вершины (т.к. верно для ϕ). Если для текущей вершины это верно, и $\phi_v = \phi_{v0} \wedge \phi_{v1}$, то Алиса пересылает бит b такой, что $\phi_{vb}(x) = 0$ (такой бит должен быть по свойствам $\wedge$, т.к. $\phi_v(x) = 0$). При этом мы знаем, что $\phi_v(y) = \phi_{v0}(y) = \phi_{v1}(y) = 1$, т.е. инвариант сохраняется. Аналогично,

если $\phi_v = \phi_{v0} \vee \phi_{v1}$, то Боб пересылает бит b такой, что $\phi_{vb}(y) = 1$ (мы соответственно знаем, что $\phi_v(x) = \phi_{v0}(x) = \phi_{v1}(x) = 0$). Когда Алиса и Боб придут в некоторый лист, то по индукции получается, что значение в этом листе на входе Алисы отличается от значения в листе на входе Боба, а значит номер переменной в листе соответствует номеру бита различия.

- **протокол → формула**

  Будем последовательно строить формулы для внутренних вершин протокола от листьев к корню. При этом будем поддерживать следующий инвариант: пусть v — вершина протокола, $X_v \times Y_v$ — соответствующий прямоугольник, тогда формула ϕ_v для вершины v такая, что для всех $x \in X_v$, $\phi_v(x) = 0$ и для всех $y \in Y_v$, $\phi_v(y) = 1$. Пусть мы построили формулы ϕ_{v0} и ϕ_{v1} для сыновей некоторой вершины v. Если вершина v соответствовала ходу Алисы, то для всех входов Алисы из множества X_v формула ϕ_v должна быть равна 0. При этом по индукционному предположению мы знаем, что для некоторых входов Алисы (на которых Алиса посылает 0) $\phi_{v0} = 0$, а для остальных обязательно $\phi_{v1} = 0$. С другой стороны для всех входов Боба $y \in Y_v$, $\phi_{v0}(y) = \phi_{v1}(y) = 1$. Поэтому, если мы положим $\phi_v = \phi_{v0} \wedge \phi_{v1}$, то инвариант сохранится. Аналогично, если вершина соответствовала ходу Боба, то следует положить $\phi_v = \phi_{v0} \vee \phi_{v1}$.

  Осталось объяснить, что мы будем делать с листьями. Заметим, что если в листе протокола написан некоторый индекс i, то в него могут попадать либо пары входов, для которых $(x_i = 0,\ y_i = 1)$, либо входы, для которых $(x_i = 1,\ y_i = 0)$, но не могут попадать одновременно. В противном случае можно было бы воспользоваться свойствами комбинаторных прямоугольников и дать Алисе и Бобу входы с одинаковыми i-ми битами, которые привели бы в этот же лист.

$$\begin{cases} (x, y) \in R_\ell, & x_i = 0, y_i = 1, \\ (x', y') \in R_\ell, & x'_i = 1, y'_i = 0. \end{cases} \implies (x', y) \in R_\ell.$$

  Таким образом можно считать, что в каждом листе кроме номера бита различия записаны также значения этого бита у Алисы и у Боба. Если в листе ℓ с номером бита различия i записаны $(x_i = 0,\ y_i = 1)$, то $\phi_\ell = x_i$, в обратном случае $\phi_\ell = \neg x_i$.

□

Таким образом мы получили взаимно однозначное соответствие между протоколами и формулами. Проблема в том, что сложность протоколов мы до этого измеряли в терминах максимальной глубины, а сложность формул — в терминах количества листьев. Давайте определим сложность протокола в терминах количества листьев.

Определение 6.7. Для отношения R_f будем обозначать через $L(R_f)$ минимальное количество листьев в коммуникационном протоколе для R_f.

Следствие 6.2. *Для любой функции f, $L(f) = L(R_f)$.*

С некоторыми потерями можно связать минимальный размер формулы для f с минимальной глубиной формулы для f.

Утверждение 6.6. *Для любой $\alpha > 1$ и для любой формулы ϕ размера s существует эквивалентная формула ϕ' размера s^α и глубины $O(\log s)$ (константа зависит от α).*

Доказательство. Определим рекурсивный алгоритм $A(\phi)$: найдём в ϕ подформулу ψ размера от $s/3$ до $2s/3$. Вернём $\phi' = (A(\psi) \wedge A(\phi|_{\psi=1})) \vee (\neg A(\psi) \wedge A(\phi|_{\psi=0}))$. Глубина рекурсии получится $\log_{3/2}(s)$, на каждой итерации глубина увеличивается на два. Суммарная глубина $2 \cdot \log_{3/2}(s)$. Таким образом размер формулы ϕ' не более $2^{2 \cdot \log_{3/2}(s)} = O(s^4)$. □

Определение 6.8. Пусть μ это некоторое распределение на входах Алисы и Боба, а X, Y — соответствующие случайные величины. *Внешнее информационное разглашение* протокола Π на распределении μ:

$$\mathrm{IC}_\mu^{ext}(\Pi) = I(\Pi(X,Y) : X, Y).$$

Внутреннее информационное разглашение протокола Π на распределении μ:

$$\mathrm{IC}_\mu^{int}(\Pi) = I(\Pi(X,Y) : X \mid Y) + I(\Pi(X,Y) : Y \mid X).$$

Лемма 6.1. *Для любого протокола* Π *и любого распределения* μ

$$D(\Pi) \geq \mathrm{IC}_\mu^{ext}(\Pi) \geq \mathrm{IC}_\mu^{int}.$$

Доказательство. Первое неравенство тривиально (нельзя раскрыть больше информации, чем количество переданных битов).

Второе неравенство можно свести к утверждению **??**. Для начала распишем взаимную информацию через энтропию.

$$\mathrm{IC}_\mu^{ext}(\Pi) = I(\Pi(X,Y) : X, Y) = H(\Pi(X,Y)) - H(\Pi(X,Y) \mid X, Y) = H(\Pi(X,Y)).$$

Последнее равенство имеет место, т.к. протокол детерминированный и $\Pi(X,Y)$ полностью определяется значениями X и Y. Аналогично, получаем

$$\mathrm{IC}_\mu^{int}(\Pi) = H(\Pi(X,Y) \mid Y) + H(\Pi(X,Y) \mid X).$$

Осталось убедиться, что $a = \Pi(X,Y)$, $x = X$, $y = Y$ удовлетворяют условиям утверждения **??**, а следовательно

$$H(\Pi(X,Y)) \geq H(\Pi(X,Y) \mid Y) + H(\Pi(X,Y) \mid X).$$

□

Теорема 6.3 ([7])**.** *Пусть* Π *коммуникационный протокол. Для любого распределения* μ*:* $\log L(\Pi) \geq \mathrm{IC}_\mu^{ext}(\Pi)$. *Кроме того существует такое распределение* μ^* *для которого* $\log L(\Pi) = \mathrm{IC}_{\mu^*}^{ext}(\Pi)$. *Будем называть* μ^* труднейшим *распределением для* Π.

Доказательство. Для детерминированных протоколов $\mathrm{IC}^{ext}(\Pi) = H_\mu(\Pi)$. Первое утверждение теоремы следует из верхней оценки на этнропию (энтропия случайной величины не превосходит логарифм числа исходов):

$$\mathrm{IC}_\mu^{ext}(\Pi) = H_\mu(\Pi) \le \log L(\Pi).$$

Для доказательства второго утверждения мы предъявим распределение μ^*: выберем (равномерно) случайный лист l протокола Π и в соответствующем прямоугольнике R_l выберем произвольную пару (x, y). Полученное распределение μ^* равномерно на листьях Π, поэтому

$$\mathrm{IC}_{\mu^*}^{ext}(\Pi) = H_{\mu^*}(\Pi) = \log L(\Pi).$$

□

Следствие 6.3. *Пусть f — булевая функция, $s \in \mathbb{N}$. $L(f) \ge s$ тогда и только тогда, когда для любого протокола Π для R_f существует распределение μ: $\mathrm{IC}_\mu^{ext}(\Pi) \ge \log s$.*

Теорема 6.4 (Храпченко)**.** *$L(\oplus_n) \ge n^2$.*

Доказательство. Покажем, что для любого протокола существует распределение μ: $\mathrm{IC}_\mu^{ext}(\Pi) \ge 2\log n$. Из этого напрямую следует, что $L(\oplus_n) \ge n^2$. Распределение μ будет равномерным распределением на парах вида $(x, x \oplus e_i)$, где $\oplus_n(x) = 0$, а строка e_i имеет единицу в позиции i и нули во всех остальных. Т.е., пары входов из распределения μ всегда будут отличаться только в одом бите.

$$\mathrm{IC}_\mu^{ext}(\Pi) \ge \mathrm{IC}_\mu^{int}(\Pi) = I(\Pi : X \mid Y) + I(\Pi : Y \mid X).$$

Рассмотрим однои из слагаемых $I(\Pi : X \mid Y)$.

$$\begin{aligned} I(\Pi : X \mid Y) &= H(X \mid Y) - H(X \mid Y, \Pi) \\ &= H(i \mid Y) - H(i \mid Y, \Pi) \\ &= \log n - 0. \end{aligned}$$

Таким образом $\mathrm{IC}_\mu^{ext}(\Pi) \ge 2\log n$. □

Упражнение 6.6. Докажите, что для любой булевой функции f и любого распределения μ существует протокол Π для R_f: $\mathrm{IC}_\mu^{int}(\Pi) \le 2\log n$.

Упражнение 6.7. Будем называть *универсальным отношением* для строк длины n отношение $U_n = \{(x, y, i) \mid x, y \in \{0,1\}^n, x_i \ne y_i\}$ (это обобщение понятия отношения Карчмера-Вигдерсона). Будем называть *расширенным универсальным отношением* для строк длины n отношение $U'_n = U_n \cup \{(x, x, \perp) \mid x \in \{0,1\}^n\}$ (решая коммуникационную задачу для расширенного универсального отношения Алиса и Боб могут получить *одинаковые* строки и тогда они должны ответить $\perp$).

Докажите следующие утверждения:

1. $4 \cdot L(U_n) \ge L(U'_n) \ge L(U_n)$.

2. $L(U'_n) \geq 2^n$.

Упражнение 6.8. Пусть $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ некоторая булева функция. Определим функцию $(\vee_m \circ f) : \{0,1\}^{m\times n} \to \{0,1\}$ следующим образом:

$$(\vee_m \circ f)(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(x_1) \vee f(x_2) \vee \cdots \vee f(x_m),$$

где $x_i \in \{0,1\}^n$ (т.е. мы определили композицию функция $\vee_m$ и f). Докажите, что $L(\vee_m \circ f) = m \cdot L(f)$.

7. Алгоритмический подход

7.1. Колмогоровская сложность

Сколько информации в первых 10^{10} знаках числа π? Её довольно мало, но сжать такое количество цифр, например, кодированием Хаффмена, не получится.

Определение 7.1. Частичная функция $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ называется *вычислимой*, если существует программа P:

- для $\forall x \in \operatorname{dom} f$: $P(x)$ печатает $f(x)$,
- для $\forall x \notin \operatorname{dom} f$: $P(x)$ не останавливается.

Определение 7.2. Пусть $F : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ — вычислимая функция. *Сложность описания относительно* F определяется как

$$K_F(x) = \min\{|p| : F(p) = x\}.$$

Определение 7.3. Будем говорить, что способ описания F *не хуже* G, обозначается $F \prec G$, если существует константа c_G такая, что для $\forall x \in \{0,1\}^*$

$$K_F(x) \leq K_G(x) + c_G.$$

Теорема 7.1 (Соломонова-Колмогорова)**.** *Существует способ описания (вычислимая функция) F такой, что для любого другого способа описания G выполняется $F \prec G$.*

Докажем сначала более простое утверждение.

Утверждение 7.1. *Пусть F и G — два способа описания. Тогда существует способ описания H такой, что $H \prec F$ и $H \prec G$.*

Доказательство. Определим H следующим образом: $H(0x) = F(x)$, $H(1x) = G(x)$ (если на каком-то входе x значение $F(x)$ или $G(x)$ не определено, то и H не определено на соответствующем входе $0x$ или $1x$). Тогда легко проверить, что для любых x верно $K_H(x) \leq K_F(x) + 1$ и $K_H(x) \leq K_G(x) + 1$. □

Доказательство теоремы 7.1. Пронумеруем все программы натуральными числами (программ счётное число). Пусть F_N — это программа с номером N (для машин Тьюринга N называется *номером Гёделя*). Рассмотрим функцию $U(\langle N, x\rangle) = F_N(x)$, где пара $\langle N, x\rangle$ закодирована следующим образом $\underbrace{11\dots1}_{N}0x$. Тогда

$$K_U(x) \leq K_{F_N}(x) + N + 1.$$

(Для машин Тьюринга U — это универсальная машина Тьюринга.) □

Определение 7.4. Будем называть $K(x) = K_U(x)$ *Колмогоровской сложностью* x.

Лемма 7.1. *Колмогоровская сложность обладает следующими свойствами.*

1. *Существует c такая, что для всех x $K(x) \leq |x| + c$.*
2. *Существует c такая, что для всех x $K(xx) \leq |x| + c$.*
3. *Для любых оптимальных F_1 и F_2 выполняется $F_1 \prec F_2$ и $F_2 \prec F_1$, т.е. существует такая константа c, что $|K_{F_1} - K_{F_2}| \leq c$.*

Доказательство. Третье свойство следует из определения. Докажем первые два.

1. Рассмотрим $H(x) = x$. Тогда $K(x) \leq K_H(x) + c = |x| + c$.
2. Рассмотрим $H(p) = pp$. Тогда $K(xx) \leq K_H(xx) + c = |x| + c$.

□

Вопрос: может быть такая длина n, что для всех $x \in \{0,1\}^n$ $K(x) < n$.

Утверждение 7.2. *Для любого n существует $x \in \{0,1\}^n$ такой, что $K(x) \geq n$ (т.е. x — несжимаемый).*

Доказательство. Слов длины n всего 2^n. Слов сложности меньше n не больше, чем программ длины меньше n: $1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 < 2^n$. □

Утверждение 7.3. *Существует $c > 0$ такое, что для 99% слов длины n:*

$$n - c \leq K(x) \leq n + c = |x| + c.$$

Доказательство. Второе неравенство мы уже доказали. Первое неравенство следует из того, что программ длины не более $n - c$ всего $1 + 2 + \dots + 2^{n-c} \leq 2^{n-c+1}$, т.е. доля слов такой сложности не может быть больше 2^{-c+1}. При $c = 11$ эта доля меньше 0.1%. □

Утверждение 7.4. *Не существует вычислимой функции $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$, которая была бы всюду определена и $f(\bar{n}) = x_n$, где $K(x_n) \geq n$ ($\bar{n}$ означает двоичную запись числа n).*

Доказательство. С одной стороны сложность x_n большая, с другой стороны мы можем описать x_n при помощи $\log n$ битов.

$$n \leq K(x_n) \leq K_f(x_n) + O(1) \leq \log n + O(1).$$

□

Замечание 7.1. Это утверждение можно усилить, заменив „всюду определена“ на „определена для бесконечного числа входов“. Доказательство останется тем же.

Следствие 7.1. *Отображение $x \to K(x)$ не является вычислимым.*

Замечание 7.2. У этого факта есть довольно простое доказательство основанное на парадоксе Берри. Этот парадокс состоит в предложении рассмотреть

наименьшее натуральное число, которое нельзя определить
фразой из не более чем четырнадцати русских слов.

Эта фраза содержит четырнадцать слов и определяет то самое наименьшее число, отсюда получаем противоречие. Аналогично, в предположении, что такое отображение является вычислимым, первую строку x для которой $K(x) \geq n$ мы можем описать при помощи $\log n$ битов.

Следствие 7.2. *Оптимальный способ описания не является всюду определённой функцией.*

Следствие 7.3. *Пусть есть некоторая формальная теория, т.ч. в ней можно записать ‘$K(x) > c$’. Для всех достаточно больших c и для всех x формулы ‘$K(x) > c$’ недоказуемы (и при этом почти все эти утверждения истины).*

Доказательство. Если для любого c существует x такое, что ‘$K(x) > c$’ доказуемо, тогда перебирая все доказательства мы сможем по c построить x. □

Следствие 7.4. *Первая теорема Гёделя о неполноте.*

Замечание 7.3. Это кроме всего прочего даёт способ с хорошей вероятностью порождать недоказуемые утверждения.

Утверждение 7.5. *Пусть $x = \langle 011010010\ldots10110\rangle$ длины n содержит $p \cdot n$ единиц и $(1-p) \cdot n$ нулей, тогда*

$$K(x) \leq \left(p \cdot \log \frac{1}{p} + (1-p) \cdot \log \frac{1}{1-p}\right) \cdot n + O(\log n).$$

Доказательство. Рассмотрим следующее описание:

$\langle$количество ’1’, количество ’0’, номер перестановки с данным числом ’1’ и ’0’$\rangle$.

Всего перестановок

$$C_n^{pn} = 2^{\left(p\cdot\log\frac{1}{p}+(1-p)\cdot\log\frac{1}{1-p}\right)\cdot n+O(\log n)}.$$

Т.е. $K(x) \leq \left(p\cdot\log\frac{1}{p}+(1-p)\cdot\log\frac{1}{1-p}\right)\cdot n+O(\log n) = H(p)\cdot n+O(\log n)$. $\square$

Замечание 7.4. В доказательстве важно кодировать эту тройку так, чтобы она однозначно разрезалась на три части. Можно, например, удвоить все биты первых компонент и добавить разделитель '01'.

7.2. Условная Колмогоровская сложность

Определение 7.5. Сложность *условного описания* x при условии y относительно F:

$$K_F(x \mid y) = \min\{|p| : F(p, y) = x\}.$$

Определение 7.6. Условное описание F *не хуже*, чем условное описание G, $F \prec G$, если существует c такая, что для любый x и y

$$K_F(x \mid y) \leq K_G(x \mid y) + c.$$

Теорема 7.2. *Существует оптимальный способ описания условного описания F такой, что для любого другого способа условного описания G выполняется $F \prec G$.*

Определение 7.7. Сложность оптимального описание x при условии y относительно оптимального способа условного описания $K(x \mid y)$ называется *условной Колмогоровской сложностью x при условии y.*

Утверждение 7.6. *Условная Колмогоровская сложность обладает следующими свойствами.*

1. $K(x \mid y) \leq K(x) + O(1)$.
2. $K(x \mid y) \leq |x| + O(1)$.
3. *Существует такая константа c, что для всех n, всех y для 99% слов x длины n выполняется $|K(x \mid y) - n| \leq c$.*
4. $K(x \mid x) = O(1)$.
5. *Пусть f — вычислимая функция. Тогда существует c_f такая, что для всех x $K(f(x) \mid x) \leq c_f$.*

Список литературы

[1] Н.К. Верещагин, Е.В. Щепин. *Информация, кодирование, предсказание*, МЦНМО, 2012.

[2] Н.К. Верещагин. *Коммуникационная сложность*, Computer Science клуб, 2017. http://compsciclub.ru/courses/communicationcomplexity/2017-spring/

[3] А.Е. Ромащенко. *Введение в теорию информации,* Computer Science клуб, 2015. http://compsciclub.ru/courses/informationtheory/2015-spring/

[4] А.Е. Ромащенко. *Краткий конспект лекций курса "Введение в теорию информации",* 2014. http://www.mccme.ru/~anromash/courses/lecture-notes-it-2014.pdf

[5] В.А. Успенский, Н.К. Верещагин, А.Шень. *Введение в колмогоровскую сложность*. МЦНМО, 2012.

[6] А. Шень. *Алгоритмическая теория информации,* Computer Science клуб, 2008. http://compsciclub.ru/courses/algo-information-theory/2008-autumn/

[7] D. Gavinsky, O. Meir, O. Weinstein, A. Wigderson. *Toward better formula lower bounds: an information complexity approach to the KRW composition conjecture.* STOC 2014.

[8] T.Kaced, A.E. Romashchenko, N.K.Vereshchagin, *A Conditional Information Inequality and Its Combinatorial Applications*. IEEE Trans. Information Theory, 2018.

[9] E. Nisan, N. Kushilevitz. *Communication complexity*, 1997.

[10] A. Rao. *Notes for CSE533: Information Theory in Computer Science*, 2010. https://homes.cs.washington.edu/~anuprao/pubs/CSE533Autumn2010/