

## ДЗ1. Принцип Дирихле и математическая индукция

1. Сколько чисел нужно выбрать из последовательности

$$\{1, 2, 3, \dots, 2n\},$$

чтобы среди них гарантированно нашлась хотя бы одна пара чисел, сумма которых была бы равна  $2n + 1$ ?

2. Имеется девять положительных целых чисел, ни одно из которых не имеет простого делителя, большего, чем 5. Докажите, что среди этих чисел найдутся по крайней мере два числа, произведение которых представляет собой квадрат некоторого целого числа.
3. Докажите, что в любой выборке из 52 положительных целых чисел найдутся хотя бы два, у которых либо их сумма, либо их разность делится на 100.
4. Внутри равностороннего треугольника со стороной в один сантиметр расположено пять точек. Докажите, что расстояние между хотя бы двумя из них не больше 0.5 сантиметров.
5. Докажите при помощи математической индукции, что  $2^n \geq n^2$ , при  $n \geq 4$
6. Докажите, что можно набрать  $n \geq 8$  рублей, используя только монеты в 3 и 5 рублей. Количество монет не ограничено.
7. На плоскости проведено несколько прямых. Они делят плоскость на области. Докажите, что области можно так раскрасить в два цвета, чтобы соседние области были покрашены в разные цвета.
8. Докажите, что 1 можно представить в виде суммы 2017 различных обыкновенных дробей с числителем 1 и положительным знаменателем.