

Теория категорий

Категории предпучков

Валерий Исаев

12 марта 2019 г.

Ном-функторы

Лемма Йонеды

Категории предпучков

Примеры

Категория графов

Категория глобулярных множеств

Определение

- ▶ Пусть A – объект некоторой категории \mathbf{C} . Тогда существуют функторы

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, -) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, A) : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$$

- ▶ На объектах они действуют следующим образом:
 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, -)(B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ и
 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, A)(B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$.
- ▶ На морфизмах они действуют следующим образом:
 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, -)(f) = g \mapsto f \circ g$ и $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, A)(f) = g \mapsto g \circ f$.
- ▶ Эти функторы называются (ковариантным и контравариантным) *Hom-функторами*.

Определение (ко)пределов через Ном-функторы

- ▶ Существует определение (ко)пределов через Ном-функторы и (ко)пределы в **Set**.
- ▶ Если $D : J \rightarrow \mathbf{C}$ – диаграмма и L – объект \mathbf{C} , то пусть $\text{Conus}_D(L) = \lim_{j \in J} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(L, D(j))$ – множество конусов диаграммы D с вершиной L .
- ▶ Если C – конус диаграммы D , то существует естественное преобразование $\alpha_X : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, L) \rightarrow \text{Conus}_D(X)$, определяемое как $\alpha_X(f)_j = C_j \circ f$.
- ▶ Конус C является пределом тогда и только тогда, когда α – естественный изоморфизм.
- ▶ Отсюда следует, что $\text{Hom}(X, -)$ сохраняет пределы.

Пример

- ▶ Например, пусть J – дискретная категория на $\{1, 2\}$, $D(j) = A_j$.
- ▶ Тогда L вместе с функциями $\pi_j : L \rightarrow A_j$ является произведением A_1 и A_2 тогда и только тогда, когда функции $\text{Hom}(X, L) \rightarrow \text{Hom}(X, A_1) \times \text{Hom}(X, A_2)$, порождаемые композицией с проекциями являются биекциями для любого X .
- ▶ Аналогичные утверждения верны и для $\text{Hom}(-, X) : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$. Например, он сохраняет пределы.
- ▶ Действительно, $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A \amalg B, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, X) \times \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, X)$ является биекцией.

Приложение

- ▶ Докажем, что правый сопряженный функтор $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ сохраняет пределы.
- ▶ Пусть F – левый сопряженный к G , $D : J \rightarrow \mathbf{D}$ – диаграмма в \mathbf{D} и L – ее предел. Тогда

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(X, G(L)) &\simeq \\ \mathrm{Hom}(F(X), L) &\simeq \\ \lim_{j \in J} \mathrm{Hom}(F(X), D(j)) &\simeq \\ \lim_{j \in J} \mathrm{Hom}(X, GD(j)). &\end{aligned}$$

План лекции

Ном-функторы

Лемма Йонеды

Категории предпучков

Примеры

Категория графов

Категория глобулярных множеств

Лемма Йонеды

Lemma

Пусть a – объект категории \mathbf{C} и $F : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ – некоторый функтор. Тогда существует биекция

$\text{Hom}_{\mathbf{Set}}^{\mathbf{C}^{op}}(\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, a), F) \simeq F(a)$ естественная по a .

Доказательство.

Если $\alpha : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, a) \rightarrow F$, то определим

$T(\alpha) = \alpha_a(id_a) \in F(a)$. Если $x \in F(a)$, то определим

$S(x) : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, a) \rightarrow F$ как $S(x)_b(f) = F(f)(x)$. Естественность $S(x)$ следует из того факта, что F сохраняет композиции.

Лемма Йонеды

Доказательство.

Нужно проверить, что T и S взаимобратны. Пусть $x \in F(a)$, тогда $T(S(x)) = S(x)_a(id_a) = F(id_a)(x) = x$.

Пусть $\alpha : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, a) \rightarrow F$. Тогда

$S(T(\alpha))_b(f) = F(f)(T(\alpha)) = F(f)(\alpha_a(id_a)) = \alpha_b(f)$. Последнее равенство следует из естественности α .

Осталось проверить естественность по a . Ее достаточно проверить для S . Если $g : a \rightarrow c$ и $x \in F(c)$, то нужно проверить, что $S_c(F(g)(x))_b(f) = S_a(x)_b(g \circ f)$. Это следует непосредственно из определения S . □

Вложение Йонеды

- ▶ Для любой категории \mathbf{C} функтор $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, -) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$ является полным и строгим.
- ▶ Действительно, в лемме Йонеды достаточно взять в качестве F функтор $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, b)$.
- ▶ Этот функтор называется *вложением Йонеды* и обозначается $\mathbf{y} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$.
- ▶ Для того, чтобы проверить, что объекты a и b категории \mathbf{C} изоморфны, достаточно проверить, что $\mathbf{y}a \simeq \mathbf{y}b$.
- ▶ Если $f : a \rightarrow b$, то f является изоморфизмом тогда и только тогда, когда для любого c композиция с f задает биекцию на множествах $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, a)$ и $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(c, b)$.

Пример

- ▶ В качестве примера использования этого факта покажем, что в декартово замкнутой категории верно $a^{b \amalg c} \simeq a^b \times a^c$.
- ▶ Действительно,

$$\begin{aligned} \text{Hom}(x, a^{b \amalg c}) &\simeq \\ \text{Hom}(b \amalg c, a^x) &\simeq \\ \text{Hom}(b, a^x) \times \text{Hom}(c, a^x) &\simeq \\ \text{Hom}(x, a^b) \times \text{Hom}(x, a^c) &\simeq \\ \text{Hom}(x, a^b \times a^c). & \end{aligned}$$

Ко- лемма Йонеды

- ▶ Интуитивно, ко- лемма Йонеды говорит, что произвольный функтор $P : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ является копределом функторов вида $\mathbf{y}a$.
- ▶ Объекты категории J_P – это пары (a, x) , где a – объект \mathbf{C} , $x \in P(a)$.
- ▶ Морфизмы между (a, x) и (b, y) – это морфизмы $f : a \rightarrow b$ категории \mathbf{C} , такие, что $P(f)(y) = x$.
- ▶ Диаграмма $D_P : J_P \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$ каждому (a, x) сопоставляет $\mathbf{y}a$.
- ▶ Ко- лемма Йонеды утверждает, что P является копределом D_P .

Ко- лемма Йонеды

Доказательство.

По лемме Йонеды достаточно проверить, что $\text{Hom}(P, -) \simeq \text{Hom}(\text{colim } D_P, -)$. У нас есть следующая последовательность биекций.

$$\begin{aligned}\text{Hom}(\text{colim}_{(a,x) \in J} (\mathbf{y}a), R) &\simeq \\ \lim_{(a,x) \in J} \text{Hom}(\mathbf{y}a, R) &\simeq \\ \lim_{(a,x) \in J} R_a.\end{aligned}$$

Ко- лемма Йонеды

Доказательство.

Нужно проверить, что $\text{Hom}(P, R) \simeq \lim_{(a,x) \in J} R_a$, и эта биекция естественна по R .

Но элементы множества $\text{Hom}(P, R)$ – это естественные преобразования, то есть функции, которые каждому $a \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ и $x \in P_a$ сопоставляют элемент R_a и удовлетворяют условию естественности.

С другой стороны, множество $\lim_{(a,x) \in J} R_a$ состоит из таких же функций α , удовлетворяющих условию, что для любого $f : a \rightarrow b$ если $P(f)(y) = x$, то $\alpha(a, x) = R(f)(\alpha(b, y))$. Это условие в точности условие естественности α .

Естественность по R проверяется напрямую. □

План лекции

Нот-функторы

Лемма Йонеды

Категории предпучков

Примеры

Категория графов

Категория глобулярных множеств

Примеры

- ▶ Предпучок на малой категории \mathbf{C} – это функтор $\mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$. Категория предпучков – это категория функторов $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$.
- ▶ Если P – предпучок на \mathbf{C} и a – объект \mathbf{C} , то мы будем писать P_a вместо $P(a)$.
- ▶ Категория графов – это категория предпучков.
- ▶ Категория последовательностей множеств

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow \dots$$

является категорией предпучков.

- ▶ Категория действий группы G – категория предпучков на G .

Свойства категорий предпучков

- ▶ Категории предпучков полные и кополные.
- ▶ Действительно, в категориях функторов пределы и копределы считаются поточечно.
- ▶ Категории предпучков декартовы замкнуты.
- ▶ Действительно, пусть P, R – предпучки на \mathbf{C} . Если R^P существует, то для любого $a \in \mathbf{C}$ должно быть верно

$$(R^P)_a \simeq \text{Hom}(\mathbf{y}_a, R^P) \simeq \text{Hom}(\mathbf{y}_a \times P, R)$$

- ▶ Мы можем использовать это свойство как определение R^P .

Доказательство

Мы уже видели, что свойство экспоненты верно для представимых функторов. Осталось проверить для произвольных:

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(X, R^P) &\simeq \\ \operatorname{Hom}(\operatorname{colim}_a(\mathbf{y}a), R^P) &\simeq \\ \lim_a(\operatorname{Hom}(\mathbf{y}a, R^P)) &\simeq \\ \lim_a(\operatorname{Hom}(\mathbf{y}a \times P, R)) &\simeq \\ \operatorname{Hom}(\operatorname{colim}_a(\mathbf{y}a \times P), R) &\simeq \\ \operatorname{Hom}(\operatorname{colim}_a(\mathbf{y}a) \times P, R) &\simeq \\ \operatorname{Hom}(X \times P, R) & \end{aligned}$$

Генераторы категории

- ▶ Коллекция S объектов категории \mathbf{C} называется ее *генератором*, если для любой пары морфизмов $f, g : A \rightarrow B$ верно, что если $f \circ s = g \circ s$ для любого морфизма s с доменом в S , то $f = g$.
- ▶ Другими словами, чтобы проверить равенство двух стрелок, достаточно проверить их равенство на объектах из S .
- ▶ Если S является генератором категории \mathbf{C} и $x \in S$, то морфизмы вида $x \rightarrow a$ называют *обобщенными элементами* объекта a .

Примеры генераторов

- ▶ В **Set** генератором является множество, состоящее из одного одноэлементного множества.
- ▶ В **Grp** генератором является \mathbb{Z} .
- ▶ Обобщенные элементы для этого генератора – это просто элементы множества.
- ▶ Коллекция объектов вида **ya** является генератором для категории предпучков.

План лекции

Нот-функторы

Лемма Йонеды

Категории предпучков

Примеры

Категория графов

Категория глобулярных множеств

Категория графов **Graph**

- ▶ В этом разделе мы просто разберем подробно пример категории графов.
- ▶ Граф G состоит из множества вершин G_V , множества ребер G_E и пары функций $d, c : G_E \rightarrow G_V$, сопоставляющих каждому ребру его начало и конец.
- ▶ Таким образом, категория графов **Graph** – это категория предпучков на категории **C**, состоящей из двух объектов V и E и двух не тождественных морфизмов.

$$V \begin{array}{c} \xrightarrow{d} \\ \xrightarrow{c} \end{array} E$$

Лемма Йонеды для **Graph**

- ▶ Вложение Йонеды говорит, что категория **C** вкладывается в категорию графов.
- ▶ $\mathbf{y}V$ – это граф, состоящий из одной вершины.
- ▶ $\mathbf{y}E$ – это граф, состоящий из одного ребра.
- ▶ $\mathbf{y}d$ и $\mathbf{y}c$ – функции, отображающие единственную вершину графа $\mathbf{y}V$ в левый или правый конец единственного ребра графа $\mathbf{y}E$.
- ▶ Лемма Йонеды говорит, что $\text{Hom}_{\mathbf{Graph}}(\mathbf{y}V, G) \simeq G_V$.
- ▶ Действительно, морфизмы из графа $\mathbf{y}V$ в G – это в точности вершины графа G .
- ▶ Лемма Йонеды говорит, что $\text{Hom}_{\mathbf{Graph}}(\mathbf{y}E, G) \simeq G_E$.
- ▶ Действительно, морфизмы из графа $\mathbf{y}E$ в G – это в точности ребра графа G .

Ко- лемма Йонеды для **Graph**

- ▶ О копределах можно думать геометрически.
- ▶ Например, если G_1 – подграф графов G_2 и G_3 , то пушаут $G_2 \amalg_{G_1} G_3$ – это граф, “склеенный” из G_2 и G_3 вдоль G_1 .
- ▶ Таким, образом ко- лемма Йонеды говорит, что любой предпучок можно “склеить” из представимых предпучков.
- ▶ В случае с графами это означает, что любой граф можно склеить из графов yV и yE .
- ▶ Действительно, любой граф можно склеить из вершин и ребер, которые в нем содержатся.

Генераторы в категории графов

- ▶ Коллекция графов $\{\mathbf{y}V, \mathbf{y}E\}$ является генератором категории **Graph**.
- ▶ Действительно, чтобы проверить, что морфизмы графов $f, g : G \rightarrow H$ равны, достаточно проверить, что они совпадают на вершинах и на ребрах.
- ▶ Другими словами, достаточно проверить, что они совпадают на морфизмах из $\mathbf{y}V$ и $\mathbf{y}E$.
- ▶ Обобщенный элемент для этого генератора – это либо вершина графа (обобщенный элемент вида $\mathbf{y}V$), либо его ребро (обобщенный элемент вида $\mathbf{y}E$).

Категория глобулярных множеств **Glob**

- ▶ Глобулярное множество – это предпучок на следующей категории:

$$0 \begin{array}{c} \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{t_0} \end{array} 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s_1} \\ \xrightarrow{t_1} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{s_2} \\ \xrightarrow{t_2} \end{array} \dots$$

где $s_{i+1} \circ s_i = t_{i+1} \circ s_i$ и $s_{i+1} \circ t_i = t_{i+1} \circ t_i$.

- ▶ Другими словами, объекты этой категории – натуральные числа, $\text{Hom}(n, n) = \{id_n\}$, $\text{Hom}(n, k) = \emptyset$ если $n > k$, и $\text{Hom}(n, k)$ состоит из двух элементов, если $n < k$.

Лемма Йонеды для **Glob**

- ▶ О глобулярных множествах вида $\mathbf{y}n$ можно думать как о n -мерных шарах.
- ▶ $\mathbf{y}0$ – точки, $\mathbf{y}1$ – отрезки, $\mathbf{y}2$ – диски, $\mathbf{y}3$ – 3-мерные шары, и т.д.
- ▶ $\mathbf{y}s_n$ вкладывает n -мерный шар в верхнюю половину границы $(n + 1)$ -мерного шара.
- ▶ $\mathbf{y}t_n$ вкладывает n -мерный шар в нижнюю половину границы $(n + 1)$ -мерного шара.
- ▶ Таким образом, $\mathbf{y}s_n$ и $\mathbf{y}t_n$ пересекаются по $(n - 1)$ -мерным шарам.
- ▶ Лемма Йонеды говорит, что если X – глобулярное множество, то $\text{Hom}(\mathbf{y}n, X)$ изоморфно множеству X_n его n -мерных шаров.
- ▶ Ко-лемма Йонеды говорит, что любое глобулярное множество склеено из шаров.