Математическая логика

Практика 08
Исчисление предикатов гильбертовского типа

01 апреля 2021г.

Вывод из аксиом в исчислении предикатов

В исчислении высказываний у нас с вами было 11 аксиом, которые перекочевали в исчисление предикатов. Кроме этого, добавились две новые аксиомы:

12. $\forall x \varphi \to \varphi(x := \tau)$
13. $\varphi(x := \tau) \to \exists x \varphi$

От подстановки $x := \tau$ требуется корректность.

Правило *Modus Ponens* все еще работает, однако появляются два новых правила вывода – *правила Бернайса* :

$$\frac{\psi \to \varphi}{\psi \to \forall x \varphi}\, B\forall$$

$$\frac{\varphi \to \psi}{\exists x \varphi \to \psi}\, B\exists$$

Работает *правило обобщения*(Gen)

$$\frac{\varphi}{\forall x \varphi}\, Gen$$

Задания:

- Выведите формулу:
$$\exists x \forall y \varphi \to \forall y \exists x \varphi$$

- Покажите, что следующие правила допустимы:

$$\frac{\varphi \to \psi}{\forall x\varphi \to \forall x\psi}$$

$$\frac{\varphi \to \psi}{\exists x\varphi \to \exists x\psi}$$

Эрбранизация

На прошлом занятии мы познакомились с процессом *сколемизации* – построения по данной формуле в ПНФ равновыполнимой ей формуле. Двойственным процессом является так называемая *эрбранизация* – процесс построения по данной формуле в ПНФ с сохранением общезначимости.
Задания. Сколемизируйте результат до Σ_1(то есть эрбранизируйте результат).

- $\neg\exists x\forall y\exists z\forall u P(x, y, z, u)$

Домашнее задание

1. Выведите формулы:
   (a) (1б.) $(\exists x\varphi(x) \to \forall y\psi(y)) \to \forall x(\varphi(x) \to \psi(x))$
   (b) (1б.) $\exists x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to \forall x\varphi(x) \to \exists x\psi(x)$
   (c) (1б.) $\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x))$
   (d) (1б.) $\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \to \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x))$
   (e) (1б.) $(\psi \to \forall x\varphi(x)) \to \forall x(\psi \to \varphi(x)),\ x \notin FV(\psi)$
2. Постройте ПНФ и сколемизируйте результат до Σ_1:
   (a) (1б.) $\exists x S(x) \vee \forall y P(x, y) \to \exists x\forall y Q(x, y)$
   (b) (1б.) $\forall u P(x, u) \to \neg P(x, y) \wedge \exists x Q(y)$