Числа Стирлинга, числа Белла

1. Найдите коэффицента при $x^7y^{11}z^3$ в многочлене $(x+y+z)^{21}$

   Решение: $\frac{21!}{7!11!3!}$

2. Получите явные аналитические выражения для чисел Стирлинга $S(n,1)$, $S(n,n)$, $S(n,2)$ и $S(n,n-1)$.

   Решение: Очевидно, что для всех натуральных значений n числа $S(n,1) = S(n,n) = 1$: существует единственное разбиение множества на один блок — это само это множество, а также на n блоков — это n элементов этого множества.

   Существует ровно 2^n разделения множества на два упорядоченных, возможно пустых блока. Исключая из них два случая разделений с пустыми блоками, получаем $\hat{S}(n,2) = 2^n - 2$ упорядоченных разбиений множества X на два блока. Поделив результат на два, получим, что $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$.

   Любое разбиение X на $(n-1)$ блок должно содержать ровно один блок, состоящий из двух элементов. Следовательно, количество $S(n,n-1)$ таких разбиений совпадает с количеством двухэлементных подмножеств множества X и равно $\binom{n}{2}$

3. Сколько существует разбиений $2n$-множества на два блока, размеры которых не равны между собой?

   Решение: Мы знаем, что $S(2n,2) = 2^{2n-1} - 1$. Подсчитаем теперь количество разбиений $2n$-множества ровно на два блока одинакового размера. В первый блок мы можем поместить n элементов $\binom{2n}{n}$ количеством способов. Элементы второго блока при этом определяются однозначно. Однако это количество способов нужно поделить на два — мы не различаем первый и второй блок. Следовательно, используя принцип "плохой-хороший" (**??**), мы получаем, что количество искомых разбиений равно

$$2^{2n-1} - 1 - \frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$

4. Придумайте комбинаторное доказательство формулы

$$k^n = \sum_{i=0}^{n} (k)_i \cdot S(n,i).$$

   Решение: Рассмотрим множество всех отображений n-элементного множества X в k-элементное множество Y. Предположим, что образ $f(X)$ отображения f имеет размер $|f(X)| = i$. Разобъем теперь X на i неразличимых блоков. Первый из них k способами можно поместить в один из k ящиков (приписать одно из k значений), второй — поместить в один из оставшихся $k-1$ ящиков и так далее. Следовательно, имеется $(k)_i \cdot S(n,i)$ функций, принимающих ровно i разных значений. Теперь требуемое следует из правила суммы.

5. Докажите формулы обращения:

$$f_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad g_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_i, \qquad k \geq 0.$$

   Решение: Доказательство этой формулы можно провести, например, так:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_i = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{j-i} \binom{i}{j} f_j = \sum_{j=0}^{k} f_j \sum_{i=j}^{k} (-1)^{j-i} \binom{k}{i} \binom{i}{j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f_j \sum_{i=j}^{k} (-1)^{j-i} \binom{k-j}{i-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f_j \sum_{l=0}^{k-j} (-1)^{-l} \binom{k-j}{l}.$$

Внутренняя сумма равна нулю для всех $k - j > 0$. В случае $k = j$ она равна единице, и поэтому

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_i = f_k.$$