

## 16 сентября 2020. Перечислительная комбинаторика.

1. Сколько существует целых чисел между 0 и 999, содержащих ровно одну цифру 7?
2. Сколько существует целых чисел между 0 и 999, содержащих хотя бы одну цифру 7?
3. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску две черных ладьи, не бьющих друг друга?
4. Сколько целых чисел от 1 до 100 не делится ни на два, ни на три, ни на пять?
5. Доказать, используя комбинаторные рассуждения, что для всех целых  $n \geq m \geq k \geq 0$  справедливо равенство

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}.$$

С его помощью доказать справедливость равенства

$$\sum_{k=1}^m \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k} = 2^m \binom{n}{m}$$

6. Дайте комбинаторную интерпретацию равенства

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}. \quad (1)$$

7. У мамы есть 10 одинаковых монет по 1 евро и 4 детей. Она хочет раздать все монеты детям. Сколькими способами она может это сделать, если
  - (а) никто из детей не может остаться ни с чем;
  - (б) она никак себя не ограничивает?
8. Сколько существует треугольников, у которых длина каждой стороны принимает одно из значений 4, 5, 6, 7?
9. Придумайте и докажите комбинаторно рекуррентное соотношение для количества  $k$ -сочетаний с повторениями.
10. \* Сколько существует шестизначных чисел, сумма цифр которых не превосходит 47?