

1 Домашнее задание на 17 октября

1. Пусть Z — центр группы G ($Z = \{z \in G \mid zg = gz \forall g \in G\}$).
 - (a) Покажите, что $Z \trianglelefteq G$.
 - (b) Докажите, что если G/Z — циклическая группа, то $G = Z$ (т.е. G абелева).
2. Докажите, что если G конечна и $|G : H| = p$, где p — наименьшее простое, делящее $|G|$, то $H \triangleleft G$.

Указание: достаточно показать, что $H_G = \bigcap gHg^{-1} = H$.
3. Разложить $\mathbb{Z}/300\mathbb{Z}$ в прямую сумму примарных циклических подгрупп.
4. Покажите, что если группа G порядка $2p$, где p простое, не является циклической, то G изоморфна группе, $D_{2p} = \{x, y \mid x^p = 1, y^2 = 1, yxy = x^{p-1}\}$.
5. Пусть G — группа порядка p , где p — простое число. Найдите порядок группы всех автоморфизмов группы G (обозначение $\text{Aut}(G)$).