Графы

1. Найдите общее решение следующих линейных однородных рекуррентных соотношений второго порядка:

$$a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n; \qquad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 13a_n; \qquad a_{n+2} = -4a_{n+1} - 4a_n.$$

   Решение

   Для рекуррентного соотношения

$$a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n$$

   корни характеристического уравнения $r^2 - 7\,r + 12 = 0$ вещественны и равны $r_1 = 3$, $r_2 = 4$. Следовательно, общий вид решения такого уравнения имеет вид

$$a_n = c_1\,3^n + c_2\,4^n.$$

   В случае уравнения

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 13a_n$$

   характеристическое уравнение $r^2 - 4\,r + 13 = 0$ имеет два комплексно-сопряженных корня $r_1 = 2 + 3i$ и $r_2 = 2 - 3i$. Следовательно, общий вид решения можно записать так:

$$a_n = (\sqrt{13})^n (c_1 \cos(n \operatorname{arctg}(3/2)) + c_2 \sin(n \operatorname{arctg}(3/2))).$$

   Наконец, характеристическое уравнение для рекуррентного соотношения

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n.$$

   имеет вид $r^2 - 4\,r + 4 = 0$. Такое уравнение имеет один корень $r = 2$ кратности 2. Следовательно, общее решение этого рекуррентного соотношения имеет вид

$$a_n = c_1\,2^n + c_2\,n\,2^n.$$

2. Докажите, что в любом простом графе, построенном на $n \geq 2$ вершинах, существуют по крайней мере две вершины с одинаковыми степенями. Остается ли верным это утверждение для мультиграфа? Для графа без петель?

   Решение

   Предположим, что это не так. В этом случае для любого числа $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ в графе G найдется вершина x_i, степень которой равна i. В частности, это означает, что в графе существуют как изолированная вершина x_0 (т. е. вершина степени 0), так и вершина x_{n-1} степени $n-1$. Последняя по определению должна быть соединена с любой другой вершиной графа G, в том числе и с вершиной x_0, что невозможно.

   В случае мультиграфа это утверждение не выполняется — достаточно рассмотреть граф на двух вершинах, соединенных ребром, с петлей у одной из его вершин. В случае отсутствия петель это утверждение также не верно — в качестве простейшего контрпримера можно взять граф на трех вершинах $\{1, 2, 3\}$ с ребром $\{1, 2\}$ и мультиребром $\{2, 3\}$ из двух ребер.

3. Докажите, что кубический граф, т. е. граф, степени всех вершин которого равны трем, всегда имеет четное число вершин.

   Решение

   Действительно, согласно первой теореме теории графов сумма степеней вершин равна удвоенному количеству ребер, т. е. всегда равна некоторому четному числу. Но в кубическом графе

   $$\sum_{x \in V(G)} \deg(x) = 3\,|V|,$$

   поэтому количество $|V|$ вершин обязательно должно быть четным числом. Понятно, что аналогичный результат справедлив и для любых других k-регулярных графов, в которых $k \geq 3$ — нечетное число.

4. Докажите, что в случае нечетных n существует турнир T, в котором для любой вершины x выполняется равенство $indeg(v) = outdeg(v)$

   Решение

   Разместим вершины равномерно по окружности и пометим эти вершины числами от 1 до n, $n = 2k + 1$, против часовой стрелки. Затем соединим каждую вершину x исходящими ребрами с ближайшими $(n-1)/2$ вершинами, расположенными от x против часовой стрелки. В результате этой операции мы получим ровно $n(n-1)/2$ ребер турнира, причем исходящая степень каждой вершины будет совпадать со входящей степенью этой вершины.

5. Подсчитайте количество ребер в полном двудольном графе $K_{m,n}$ на $|V(K_{m,n})| = n + m$ вершинах. Что можно сказать о параметрах m и n в случае, если полный двудольный граф $K_{m,n}$ является k-регулярным?

   Решение

   В полном двудольном графе $K_{m,n}$ каждая вершина из первого блока X, $|X| = m$, соединена с каждой вершиной из второго блока Y, $|Y| = n$. Иными словами, любая вершина первого блока инцидентна n ребрам. Всего же у нас имеется m вершин в первом блоке. Суммируя по всем вершинам первого блока, мы получаем, что количество ребер равно $n \cdot m$.

   Так как в k-регулярном графе степень любой вершины равна k, а в полном двудольном графе $K_{m,n}$ параметры m и n определяют степень вершин первого и второго блоков этого графа, в таком графе должны выполняться равенства $m = n = k$.

6. Пусть G — простой граф, построенный на 9 вершинах. Предположим, что сумма степеней вершин графа G больше или равна 27. Правда ли, что в таком графе обязательно существует вершина, степень которой больше или равна 4?

   Решение

   Да, это правда. Действительно, из условия задачи следует, что

   $$\sum_{i=1}^{9} \deg(x_i) \geq 27.$$

   Предположим, что в графе степень любой вершины x_i меньше или равна трем. Если хотя бы одна из вершин x_i будет иметь степень, строго меньшую, чем 3, мы в сумме 27 получить не сможем. Единственный вариант, когда это возможно, — это случай $\deg(x_i) = 3$ для любого $i = 1, \ldots, 9$. Однако в этом случае мы получим нечетное количество вершин нечетной же степени, что невозможно. Как следствие, хотя бы одна вершина в таком графе обязана иметь степень, большую или равную 4.

7. Докажите, что граф Q_k (т. е. k-куб) действительно является k-регулярным двудольным графом. Подсчитайте количество вершин и ребер в таком графе. Сколько различных копий P_3 и C_4 содержит такой граф?

   Решение

   Так как любой вершине однозначно сопоставляется бинарная строка длины k, в графе Q_k имеется 2^k вершин. Далее, две вершины в графе Q_k смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им бинарные последовательности отличаются только лишь в одной из k позиций. Любая такая позиция задает для выбранной вершины смежную с ней вершину. Следовательно, степень каждой вершины в Q_k одинакова и равна k. Наконец, рассмотрим произвольную вершину, заданную бинарной строкой длины k. Если мы поменяем любую из цифр этой строки на противоположную, мы тем самым поменяем четность суммы всех чисел в строке. Следовательно, любая вершина, сумма чисел в строке которой сравнима с единицей по модулю 2, смежна только лишь с вершинами, сумма чисел в строке которых сравнима с нулем по модулю 2, и наоборот. А это и означает, что граф Q_k является двудольным.

   Покажем теперь, что количество ребер в таком графе равняется $k2^{k-1}$. Действительно, в графе имеется 2^k вершин, и из каждой вершины исходит ровно k ребер. Так как любое ребро при этом считается дважды, общее количество ребер равно $k2^{k-1}$.

   Подсчитаем количество различных путей P_3 в графе Q_k. Для этого заметим, что любую вершину x такого графа мы можем рассматривать как центральную вершину такого пути. Любая такая вершина имеет ровно k соседей. Нам достаточно выбрать двух соседей из k, для того чтобы задать некоторый путь P_3. Всего вершин у нас 2^k. Из k соседей заданной вершины мы $\binom{k}{2}$ способами можем выбрать двух соседей. Следовательно, всего имеется $2^k\binom{k}{2}$ копий графа P_3 в графе Q_k.

   Теперь заметим, что любой цикл C_4 в графе Q_k состоит из четырех различных путей P_3. Кроме того, любой путь P_3 однозначно дополняется до цикла C_4 в Q_k. Следовательно, количество копий C_4 в графе Q_k в четыре раза меньше количества копий P_3, т. е. равно $2^{k-2}\binom{k}{2}$.

8. Последовательностью степеней вершин графа или степенной последовательностью (degree sequence) называется список всех степеней вершин графа G, записанный в порядке невозрастания:

   $$\deg(x_1) \geq \deg(x_2) \geq \ldots \geq \deg(x_n).$$

   Докажите, что невозрастающая последовательность $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ целых неотрицательных чисел является степенной последовательностью некоторого графа G тогда и только тогда, когда сумма всех этих чисел есть четное число.

   Решение

   То, что сумма членов последовательности степеней вершин является четным числом, следует из первой теоремы теории графов. Для доказательства в обратную сторону предъявим алгоритм построения некоторого мультиграфа G по заданной последовательности $\mathbf{d} := (d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Соединим попарно все вершины нечетной степени. Так как их четное число, мы всегда сможем это сделать. Затем добавим к каждой вершине петли в количестве, равном $\deg(x)/2$ для четных вершин и $(\deg(x) - 1)/2$ для нечетных. В результате получим некоторый мультиграф G, у которого степенная последовательность совпадет с заданной числовой последовательностью $\mathbf{d}$.

9. Невозрастающая последовательность неотрицательных чисел

   $$\mathbf{d} := (d_1, d_2, \ldots, d_n), \qquad d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 0,$$

называется *графовой,* если она является последовательностью степеней вершин некоторого *простого* графа G. Покажите, что последовательности чисел $(1, 1, 0)$ и $(2, 2, 1, 1)$ являются графовыми, предъявив для каждой из них соответствующие им простые графы.

Решение

Первой последовательности соответствует граф на трех вершинах с одним ребром, а второй — простой путь на четырех вершинах.

10. Сколько различных ориентированных графов можно получить из одного и того же простого графа G, $|E(G)| = m$, ориентацией его ребер?

Решение

Так как каждое ребро мы можем сориентировать двумя различными способами, для графа G с m ребрами мы можем получить 2^m различных орграфов D.

11. Докажите, что любой турнир, построенный на n вершинах, имеет не более одной вершины x, исходящая степень которой $outdeg(x) = n - 1$.

Решение

Из вершины x с исходящей степенью $(x) = n - 1$ исходят ребра ко всем другим вершинам орграфа. Если бы в турнире была еще одна вершина y с исходящей степенью $(y) = n - 1$, то эти вершины были бы соединены между собой двумя противоположно ориентированными ребрами, что в турнире запрещено.