Метрические и нормированные пространства

1. Пусть $\rho(x,y) = \sqrt{|x-y|}$. Является ли $(\mathbb{R},\rho)$ метрическим пространством?

2. А является ли метрикой $\rho(x,y) = \sin^2(x-y)$

3. Пусть $\rho(x,y)$ - метрика. Докажите, что $\rho_1(x,y) = \ln(1+\rho(x,y))$ является метрикой

4. В некотором метрическом пространстве шар радиуса r_1 содержится в шаре радиуса r_2 (и не совпадает с ним). Верно ли, что $r_2 \geqslant r_1$? А что $2r_2 \geqslant r_1$? А что можно сказать про нормированные пространства?

5. Будут ли следующие величины задавать норму на пространстве $C[0,1]$?

$$\text{a)} \quad \|f\| = \int_0^1 |f(x)|\,dx;$$

$$\text{b)} \quad \|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

$$(*)\ \text{c)} \quad \|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f'(x)|.$$

6. Пусть $x_n(t) = t^n$. Проверьте, что x_n сходится к 0 в пространстве $CL_1[0,1]$

7. На плоскости дано множество, являющееся объединением концентрических окружностей радиусов $r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots$. Является ли оно замкнутым? А открытым? А что можно сказать про объединение таких концентрических кругов?

8. Является ли множество $\mathbb{Q} \cup [0,1]$ замкнутым в $\mathbb{R}$?

9. Постройте последовательность открытых множеств, пересечение которых — замкнутое множество.

10. (*) Пусть (X,ρ) — метрическое пространство. Докажите, что $(X, \frac{\rho}{1+\rho})$ — тоже метрическое пространство и, более того, открытые множества в нём такие же, как и в (X,ρ).

11. Пусть $F \in C[0,1]$ — фиксированная функция. Докажите, что множество $\{f \in C[0,1] : f(x) > F(x)\ \forall x \in [0,1]\}$ открыто в $C[0,1]$.

12. Является ли множество $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ компактным? А множество $\{1, 1/2, 1/3, \ldots\} \cup \{0\}$?

13. Докажите, что сфера $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1\}$ компакт

14. Докажите, что множество функций вида $f(x) = ax + b$, где $0 \leqslant a \leqslant 1$ и $0 \leqslant b \leqslant 1$ компактно в $C[0,1]$.