

Числа Стирлинга, числа Белла

1. Найдите коэффициент при $x^7 y^{11} z^3$ в многочлене $(x + y + z)^{21}$
2. Получите явные аналитические выражения для чисел Стирлинга $S(n, 1)$, $S(n, n)$, $S(n, 2)$ и $S(n, n - 1)$.
3. Сколько существует разбиений $2n$ -множества на два блока, размеры которых не равны между собой?
4. Придумайте комбинаторное доказательство формулы

$$k^n = \sum_{i=0}^n \binom{k}{i} \cdot S(n, i).$$

5. Докажите, что для всех $n > 2$ числа Белла $B(n) < n!$, а) по индукции б) придумав инъекцию из разбиений множества на подмножества в перестановки.
6. Обозначим через $F(n)$ количество разбиений n -множества без блоков единичной длины. Найдите рекуррентную формулу для $F(n)$.
7. Докажите, что количество разбиений n -элементного множества, при котором ни в одном блоке не содержится пара последовательно идущих чисел, описывается числом Белла $B(n - 1)$.
8. Каждая вершина выпуклого n -угольника окрашивается либо в черный, либо в белый цвет. Назовем диагональ разноцветной, если ее концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовем правильной, если n -угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек, отличных от вершин. Найдите количество правильных раскрасок.