

Интегралы

1. Вычислите:

а)

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

б)

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$$

2. Сравните:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx \text{ и } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x dx$$

3. Докажите, что

$$\frac{1}{20\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt{1+x^2}} dx < \frac{1}{20}$$

4. Найдите производную функции

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

5. Вычислите

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos(t^2) dt}{x}$$

6. Докажите неравенства

$$\frac{4}{9}(e-1) < \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)(2-x)} dx < \frac{1}{2}(e-1)$$

Пределы интегральных сумм

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

где $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $[a, b] = [x_0, x_n]$

1. Вычислите интеграл

$$\int_1^2 x^2 dx$$

как предел интегральных сумм

2. Докажите равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i} = \ln 2$$

3. С помощью интегралов найдите

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n^2}$$

4. Найдите

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$