Домашнее задание

Note: Во всех заданиях не забывайте про подробности.

1 Докажите, что набор коэффициентов многочлена $(x^2 + 4x + 3)^{100}$ можно разбить на два набора с одинаковой суммой.

2 Найдите остаток от деления x^{1000} на $x^2 - 3x + 2$.

3 Предъявите (в каком-нибудь виде) многочлен степени меньшей, чем n такой, что $f(k) = 1/k$ для натуральных k, не превосходящих n и объясните почему такой многочлен единственен. (Указание: рассмотрите сначала случаи $n = 1$, $n = 2$).

Note: Подмножество $I \subset A$ (здесь предполагается, что A — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей) называется *идеалом*, если оно содержит ноль, замкнуто относительно сложения и взятия обратного:

$$a, b \in I \implies a + b \in I, -a \in I$$

а также умножения на элементы из A:

$$a \in I, k \in A \implies ka \in I$$

4 Покажите, что пересечение идеалов (как множество) тоже идеал. (Указание: просто по определению)

5 Покажите, что если I, J — идеалы, то $I + J = \{i + j, i \in I, j \in J\}$ тоже идеал.