1. Нет, это не так: если граф G состоит из нескольких связных компонент, каждая из которых представляет собой цикл, то сам граф G циклом не является.

2. Циклом длины 7 в показанном на рисунке графе G является, например, замкнутый путь вида $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Замкнутый путь той же длины — это, например, путь вида $2, 7, 6, 3, 4, 5, 6, 2$. Так как в таком пути повторяется вершина 6, такой путь циклом не является. Наконец, замкнутый маршрут длины 7 вида $2, 6, 3, 4, 5, 6, 3, 2$ замкнутым путем не является — в нем повторяется ребро $\{6, 3\}$.

3. Обозначим через x и y вершины, имеющие нечетную степень. Пусть вершина x принадлежит компоненте связности V_1 графа G, а вершина y ей не принадлежит. Тогда подграф, индуцированный множеством V_1, содержит единственную вершину нечетной степени, что невозможно.

4. В графе G вершины 1, 11 и 13 являются изолированными, а остальные вершины являются связанными. Путь вида $7, 14, 10, 5, 15, 3, 9, 6, 12, 4, 8, 2$ является простым путем максимальной длины, равной 11.

Рис. 1

   В случае регулярного графа все вершины имеют одинаковую степень, равную d. Из теоремы **??** следует, что в таком графе степень d, умноженная на количество n вершин в графе, равна удвоенному количеству ребер в графе, т. е. $d \cdot n = 44$. Иными словами, d — делитель числа 44, т. е. принадлежит множеству чисел $\{1, 2, 4, 11, 22, 44\}$. С другой стороны, d не может превосходить величины $n - 1$. Как следствие, множество возможных значений d сужается и равно $\{1, 2, 4\}$. Случаи $d = 2$ и $d = 4$ возможны: первый случай отвечает простому циклу C, построенному на 22 вершинах, а второй отвечает графу, построенному на цикле C_{11}, каждая вершина которого соединена двумя дополнительными ребрами с вершинами, расположенными через одну вершину от нее (рис. 1). Случай же $d = 1$ отвечает 22 парам вершин, каждая из которых соединена ребром. Такой граф связным уже не является.

5. Пусть в G имеется маршрут, соединяющий две вершины x и y в графе. Тогда в графе могут существовать и другие маршруты, соединяющие эти вершины. Выберем среди них маршрут минимальной длины. Утверждается, что такой маршрут обязательно является простым путем, соединяющим эти вершины.

   Действительно, предположим противное, т. е. предположим, что существует вершина z, которая встречается на пути из x в y более одного раза. В этом случае мы можем участок от первой встречи с вершиной z до второй из данного маршрута удалить и тем самым уменьшить его длину, что невозможно.

6. Для случая замкнутого маршрута нечетной длины это утверждение верно. Действительно, рассмотрим в таком маршруте вершину x, повторяющуюся хотя бы два раза. Эта вершина делит исходный замкнутый маршрут на два замкнутых подмаршрута, один из которых обязательно имеет нечетную длину. Повторяя процесс для подциклов нечетной длины, мы получим в конце концов цикл нечетной длины.

   В случае замкнутого маршрута четной длины это утверждение неверно. В качестве контрпримера мы можем рассмотреть произвольное ребро $\{x, y\}$ в графе G. Замкнутый маршрут четной длины вида $\{x, y, x\}$ циклом не является.

7. Данное утверждение неверно. Опровергают это утверждение, к примеру, следующие два маршрута в простом графе G:

$$M_1 = x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots x_n \qquad \text{и} \qquad M_2 = x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots x_n.$$

8. Данное утверждение верно. Для доказательства достаточно идти вдоль первого пути до первой точки пересечения со вторым путем, а затем вернуться обратно в начальную точку по второму пути. Пройденный путь будет тогда искомым простым циклом.

9. Предположим обратное, а именно, что у нас существуют два пути максимальной длины P_1 и P_2, которые не пересекаются друг с другом. Рассмотрим множество S вершин пути P_1 и множество T вершин пути P_2. Среди всех путей, соединяющих S и T, выберем путь P наименьшей длины. Такой путь имеет лишь одну общую вершину x с P_1 и лишь одну общую вершину y с P_2. Теперь построим из участков путей P_1 и P_2, а также из пути P, путь, длина которого больше и P_1, и P_2. Получим противоречие.

10. Рассмотрим две произвольные вершины в графе G. Если они не связаны ребром, то из каждой из них исходят по крайней мере $n/2$ ребер. Приходят же они в $n-2$ вершины. Как следствие, обязательно найдется по меньшей мере одна вершина, которая соединена ребрами с обеими этими вершинами.

    Можно тот же факт доказать от противного. Предположим, что граф несвязен. Тогда он состоит по меньшей мере из двух компонент, причем в одной из них количество вершин меньше или равно $n/2$. Но в такой компоненте $\delta < n/2$, а это противоречит исходному предположению.

    В качестве несвязного графа, для которого $\delta(G) = n/2 - 1$, можно взять два экземпляра ребра K_2 для случая $n = 4$.

11. Данное неравенство достаточно очевидно. Действительно, $d(x, y)$ представляет собой длину кратчайшего пути между вершинами x и y, тогда как $d(x, z) + d(z, y)$ подсчитывает длину пути между теми же вершинами, который проходит через вершину z. Длина такого пути по определению не превосходит $d(x, y)$.

12. Так как диаметр есть наибольшее расстояние между вершинами в графе, а радиус — какое-то расстояние, справедливо неравенство $(G) \geq r(G)$. Для доказательства второго неравенства рассмотрим одну из центральных вершин $z \in V(G)$ графа G. Диаметр графа соединяет какие-то вершины x и y в графе. Согласно неравенству треугольника

    $$(G) = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq r(G) + r(G) = 2r(G).$$

    В полном графе K_n имеем $(K_n) = r(K_n) = 1$. В цепочке из $2n + 1$ вершины диаметр в точности равен двум радиусам графа.

13. Рассмотрим две произвольные пары вершин x и y в графе G. Если эти две вершины несмежны, то в графе $\overline{G}$ они соединены ребром. Теперь предположим, что они смежны в G. Так как граф G несвязный, в G обязательно найдется хотя бы одна вершина z, не принадлежащая компоненте связности графа G, в которой лежат вершины x и y. В графе $\overline{G}$ вершины z и x, а также вершины z и y связаны ребром. Следовательно, в графе $\overline{G}$ эти две вершины связаны путем длины 2. Отсюда, в частности, следует, что диаметр любого такого графа G строго меньше чем 3.

14.