

Принцип Дирихле и математическая индукция.

1. Докажите, что в наборе из любого $(n + 1)$ -го положительного целого числа найдутся по крайней мере два числа, имеющих один и тот же остаток от деления на n .
2. Сколько людей нужно выбрать из группы, состоящей из двадцати супружеских пар, чтобы в выборку гарантированно вошла хотя бы одна супружеская пара?
3. В прямоугольнике со сторонами 6×8 сантиметров помещены пять точек. Докажите, что существуют хотя бы две точки, расстояние между которыми меньше или равно пяти сантиметрам.
4. Докажите, что в последовательности чисел $7, 77, 777 \dots$ один из первых 2014 членов данной последовательности делится на 2013.
5. Докажите, что в любом $(n + 1)$ -элементном подмножестве множества первых $2n$ чисел обязательно найдутся по крайней мере два взаимно-простых числа.
6. Имеется произвольная последовательность a_1, \dots, a_n целых чисел, не обязательно различных. Докажите, что в такой последовательности обязательно найдется отрезок $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_l$, сумма элементов которого $\sum_{i=k+1}^l$ делится на n .
7. Докажите, что для любого натурального n верно $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
8. Доказать, что квадрат можно разрезать на n квадратов (возможно, разных размеров) при любом $n \geq 6$.
9. Доказать, что если из доски размера $2^n \times 2^n$ вырезать произвольную клетку, то полученную доску можно замостить уголками из 3 клеток.
10. Узлы бесконечной клетчатой бумаги покрашены в два цвета. Докажите, что существуют две горизонтальные и две вертикальные прямые, на пересечениях которых лежат точки, покрашенные в один и тот же цвет.

11. Футбольная команда за сезон отыграла 30 матчей и забила соперникам в совокупности 53 гола. Известно, что в каждой игре команда забивала хотя бы один гол. Докажите, что существует непрерывная последовательность игр, в течение которой команда забила ровно шесть голов. Останется ли утверждение верным в случае, если команда забьет не 53, а 60 голов?
12. Докажите, что в произвольном $(n + 2)$ -м подмножестве множества $\{1, 2, \dots, 3n\}$ чисел обязательно найдутся хотя бы два числа, разность которых строго больше n и строго меньше $2n$.
13. Докажите, что

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\dots(n-1)\sqrt{n}}}} < 3$$

14. Лабиринтом называется клетчатый квадрат 10×10 , некоторые пары соседних узлов в котором соединены отрезком — «стеной» — таким образом, что переходя из клетки в соседнюю по стороне клетку и не проходя через стены, можно посетить все клетки квадрата. Границу квадрата будем также считать обнесенной стеной. В некоторой клетке некоторого лабиринта стоит робот. Он понимает 4 команды — Л, П, В, Н, по которым соответственно идет влево, вправо, вверх и вниз, а если перед ним «стена», то стоит на месте. Как написать программу для робота, выполняя которую он обойдет все клетки независимо от лабиринта и от своего начального положения?