

Математическая логика и теория вычислимости

Лекция 2. Полные системы связок

Денис Николаевич Москвин

ИТМО, корпоративная магистратура JetBrains
Разработка ПО / Software Engineering

17.02.2021

- 1 Полнота системы связок (\neg , \wedge , \vee , \rightarrow)
- 2 Приведение формул к нормальным формам
- 3 Другие полные системы связок
- 4 Критерий Поста

- 1 Полнота системы связок (\neg , \wedge , \vee , \rightarrow)
- 2 Приведение формул к нормальным формам
- 3 Другие полные системы связок
- 4 Критерий Поста

- *Отношение эквивалентности* — это рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение.
- В нашей истинностной интерпретации формул связка \leftrightarrow является отношением эквивалентности.
- Как определить, принадлежат ли две формулы к одному классу эквивалентности?

- *Отношение эквивалентности* — это рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение.
- В нашей истинностной интерпретации формул связка \leftrightarrow является отношением эквивалентности.
- Как определить, принадлежат ли две формулы к одному классу эквивалентности?
- Удобный способ — определить для каждого класса *нормальную форму*, то есть выделить в каждом классе уникальный элемент и задать алгоритм приведения любого другого элемента к нему.


- *Литерал* — пропозициональная переменная или ее отрицание.
- *Конъюнкт* — конъюнкция литералов. Например, $p \wedge \neg q \wedge \neg r$.
- Формула называется *дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)*, если она представляет собой дизъюнкцию конъюнктов: $p \wedge \neg q \wedge \neg r \vee \neg p \wedge s \vee p$.
- *Дизъюнкт* — дизъюнкция литералов. Например, $\neg p \vee q \vee r$.
- Формула называется *конъюнктивной нормальной формой (КНФ)*, если она представляет собой конъюнкцию дизъюнктов: $(\neg p \vee q \vee s) \wedge \neg q \wedge (r \vee \neg r)$.

- ДНФ называют *совершенной (СДНФ)*, если любая пропозициональная переменная входит в каждый конъюнкт ровно один раз: $\neg p \wedge \neg q \vee p \wedge \neg q \vee p \wedge q$.
- КНФ называют *совершенной (СКНФ)*, если любая пропозициональная переменная входит в каждый дизъюнкт ровно один раз: $(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)$.
- Как записать тавтологию и противоречие в СДНФ и СКНФ?

Теорема о полноте. Любая булева функция n переменных может быть записана в виде пропозициональной формулы.

Доказательство.

- Пусть формула выполнима. Для каждой строки со значением 1 в таблице истинности, задающей функцию, строим конъюнкт из всех переменных, имеющих значение 1, и отрицаний переменных, имеющих значение 0. Искомая формула представляет собой дизъюнкцию таких конъюнкций.
- Пусть формула необщезначима¹. Для каждой строки со значением 0 в таблице истинности, строим дизъюнкт из всех переменных, имеющих значение 0, и отрицаний переменных, имеющих значение 1. Искомая формула представляет собой конъюнкцию таких дизъюнкций. ■

¹Для доказательства достаточно покрыть случай противоречия. 

- 1 Полнота системы связок ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$)
- 2 Приведение формул к нормальным формам
- 3 Другие полные системы связок
- 4 Критерий Поста

Алгоритм построения ДНФ

- Избавляемся от импликаций, используя эквивалентность

$$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B.$$

- Избавляемся от отрицаний составных подформул, используя законы Де Моргана

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

- Избавляемся от двойного отрицания: $\neg(\neg A) \leftrightarrow A$.
- Используем дистрибутивность и поглощение

$$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow A \wedge B \vee A \wedge C$$

$$A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$$

$$A \vee A \wedge B \leftrightarrow A$$

Алгоритм построения СДНФ по ДНФ

- Если в конъюнкте не хватает переменной (скажем q), добавляем в него $q \vee \neg q$.

$$p \vee p \wedge \neg q \leftrightarrow p \wedge (q \vee \neg q) \vee p \wedge \neg q$$

- Используем дистрибутивность

$$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow A \wedge B \vee A \wedge C$$

$$p \wedge (q \vee \neg q) \vee p \wedge \neg q \leftrightarrow p \wedge q \vee p \wedge \neg q \vee p \wedge \neg q$$

- Убираем повторяющиеся конъюнкты, используя идемпотентность \vee

$$A \vee A \leftrightarrow A$$

$$p \wedge q \vee p \wedge \neg q \vee p \wedge \neg q \leftrightarrow p \wedge q \vee p \wedge \neg q$$

- Избавляемся от импликаций, используя эквивалентность

$$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B.$$

- Избавляемся от отрицаний составных подформул, используя законы Де Моргана

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

- Избавляемся от двойного отрицания.
- Используем дистрибутивность и поглощение

$$A \vee B \wedge C \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$$

$$A \vee A \wedge B \leftrightarrow A$$

Алгоритм построения СКНФ по КНФ

- Если в дизъюнкте не хватает переменной (скажем q), добавляем в него $q \wedge \neg q$.

$$p \wedge (p \vee \neg q) \leftrightarrow (p \vee q \wedge \neg q) \wedge (p \vee \neg q)$$

- Используем дистрибутивность

$$A \vee B \wedge C \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$(p \vee q \wedge \neg q) \wedge (p \vee \neg q) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg q)$$

- Убираем повторяющиеся дизъюнкты, используя идемпотентность \wedge

$$A \wedge A \leftrightarrow A$$

$$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg q) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$$

- 1 Полнота системы связок (\neg , \wedge , \vee , \rightarrow)
- 2 Приведение формул к нормальным формам
- 3 Другие полные системы связок**
- 4 Критерий Поста

- Система связок (\neg, \wedge, \vee) полна. Действительно, от импликации можно избавиться, используя эквивалентность

$$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B$$

- Система связок (\neg, \wedge) полна. От дизъюнкции можно избавиться, используя следствие закона Де Моргана

$$A \vee B \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

- Система связок (\neg, \vee) полна. От конъюнкции можно избавиться, используя следствие закона Де Моргана

$$A \wedge B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$$

- Полна ли система связок (\neg, \rightarrow) ?

- Введем следующие бинарные связки: \uparrow (штрих Шеффера, NAND) и \downarrow (стрелка Пирса, NOR):

$$p \uparrow q \leftrightarrow \neg(p \wedge q)$$

$$p \downarrow q \leftrightarrow \neg(p \vee q)$$

p	q	$p \uparrow q$	$p \downarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

- Система из одной связки (\uparrow) полна. Действительно,

$$\neg A \leftrightarrow A \uparrow A$$

$$A \wedge B \leftrightarrow (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$$

- Система из одной связки (\downarrow) полна. Действительно,

$$\neg A \leftrightarrow A \downarrow A$$

$$A \wedge B \leftrightarrow (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$$

- Введем бинарную связку: \oplus (сложение по модулю 2, XOR):

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Система связок ($\oplus, \wedge, 1$) полна. Действительно,

$$\neg A \leftrightarrow A \oplus 1$$

$$A \vee B \leftrightarrow A \oplus B \oplus A \wedge B$$

- Мы предполагаем приоритет \oplus ниже \wedge , ассоциативность не играет особой роли, поскольку связка ассоциативна.
- Связка \oplus коммутативна и \wedge дистрибутивна относительно нее.

- *Моном* — это либо константа 1, либо конъюнкция набора переменных.
- *Полином Жегалкина* — сумма мономов по модулю 2.
- Поскольку $A \oplus A \leftrightarrow 0$, то повторяющиеся четное число раз мономы в полиноме сокращают друг друга.
- **Теорема.** Всякая булева функция может быть представлена полиномом Жегалкина.

Доказательство. Индукция. Пусть умеем представлять полиномом булеву функцию $n - 1$ переменной. Тогда

$$f(p_1, \dots, p_n) = f(0, p_2, \dots, p_n) \oplus (f(0, p_2, \dots, p_n) \oplus f(1, p_2, \dots, p_n)) \wedge p_1$$



Теорема. Всякая булева функция *однозначно* может быть представлена полиномом Жегалкина.

Доказательство. Пусть $f(p_1, \dots, p_n)$ представима разными полиномами M и N . Они равны при любых оценках, то есть $M \oplus N \leftrightarrow 0$.

Докажем по индукции, что тогда $A \equiv M \oplus N$ не содержит мономов (то есть M и N равны как полиномы)

$$A(p_1, \dots, p_n) = B(p_2, \dots, p_n) \oplus p_1 \wedge C(p_2, \dots, p_n)$$

Полагая $p_1 = 0$ и $p_1 = 1$ видим, что $B \leftrightarrow 0$ и $C \leftrightarrow 0$, (по IH) они не содержат мономов, то есть A не содержит мономов. ■

- 1 Полнота системы связок ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$)
- 2 Приведение формул к нормальным формам
- 3 Другие полные системы связок
- 4 Критерий Поста

- Система связок (\wedge, \vee) не полна. Она позволяет выразить только монотонные функции (монотонно неубывающие по каждому своему аргументу).
- Функция называется сохраняющей единицу, если

$$f(1, 1, \dots, 1) = 1$$

- Система связок $(\wedge, \vee, \rightarrow)$ не полна. Она “сохраняет единицу”.
- Имеется ли универсальный способ определения полноты/неполноты системы связок?

- Выделяют 5 предполных классов:
 - функции сохраняющие ноль, T_0 ;
 - функции сохраняющие единицу, T_1 ;
 - монотонные функции, M ;
 - линейные функции, L ;
 - самодвойственные функции, S .
- Функция называется *самодвойственной*, если

$$f(p_1, p_2, \dots, p_n) = \neg f(\neg p_1, \neg p_2, \dots, \neg p_n)$$

- Функция называется *линейной*, если все мономы в представляющем ее полиноме Жегалкина содержат не более одной переменной

$$f(p_1, p_2, \dots, p_n) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 \wedge p_1 \oplus \alpha_2 \wedge p_2 \oplus \dots \oplus \alpha_n \wedge p_n$$

- **Теорема.** Если набор функций содержится в некотором предполном классе, то любая композиция этих функций тоже содержится в этом классе.
- **Теорема (критерий Поста).** Набор булевых функций является полным тогда и только тогда, когда он не принадлежит целиком к одному из предполных классов T_0 , T_1 , M , L , S .
- **Доказательство.**
 - **Необходимость.** Следует из предыдущей теоремы.
 - **Достаточность.** Сконструируем связки, образующие полный набор, из функций, не лежащих в классах T_0 , T_1 , M , L , S .

- Пусть $f \notin T_0$. Подставим вместо всех переменных одну (p), получим

$$\begin{aligned}f(0, 0, \dots, 0) &= 1 \\f(p, p, \dots, p) &= ?\end{aligned}$$

Результат: имеем либо константную функцию 1, либо \neg .

- Пусть $f \notin T_1$. Подставим вместо всех переменных одну (p), получим

$$\begin{aligned}f(p, p, \dots, p) &= ? \\f(1, 1, \dots, 1) &= 0\end{aligned}$$

Результат: имеем либо константную функцию 0, либо \neg .

- Если \neg все еще нет, то есть обе константы.
- Пусть $f \notin M$. Найдем переменную, на которой она убывает, подставим подходящие константы вместо остальных, получим \neg .
- Может еще не хватать констант.
- Пусть $f \notin S$. Тогда на некотором наборе значений

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\neg\alpha_1, \neg\alpha_2, \dots, \neg\alpha_n)$$

Вместо 0 подставляем p , вместо 1 подставляем $\neg p$.

Результат: имеем какую-то константную функцию, другая получается отрицанием.

Конструируем \wedge или \vee

- Пусть $f \notin L$. Значит в полиноме Жегалкина есть моном, содержащий конъюнкцию по крайней мере двух переменных. Пусть это p и q , группируем

$$A \oplus B \wedge p \oplus C \wedge q \oplus D \wedge p \wedge q$$

Коэффициенты A, B, C, D зависят от остальных переменных.

- D заведомо не 0 , то есть можно выбрать такую оценку, чтобы он обратился в 1 .
- Имеем один из вариантов

$$\alpha \oplus p \wedge q$$

$$\alpha \oplus p \oplus p \wedge q$$

$$\alpha \oplus q \oplus p \wedge q$$

$$\alpha \oplus p \oplus q \oplus p \wedge q$$

- α полностью в нашей власти, поскольку уже есть \neg .

Конструируем \wedge или \vee (2)

- $p \wedge q$ — получаем конъюнкцию.
- $p \oplus p \wedge q \leftrightarrow p \wedge (1 \oplus q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$, отрицание уже есть, получаем конъюнкцию.
- $q \oplus p \wedge q \leftrightarrow q \wedge (1 \oplus p) \leftrightarrow \neg p \wedge q$, отрицание уже есть, получаем конъюнкцию.
- $p \oplus q \oplus p \wedge q \leftrightarrow 1 \oplus (1 \oplus p) \wedge (1 \oplus q) \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q) \leftrightarrow p \vee q$ — получаем дизъюнкцию.

