

ДЗ2. Комбинаторика. Биномиальные коэффициенты.

1. На глобусе проведены 12 параллелей (окружностей, параллельных экватору) и 24 меридиана (дуги, соединяющие северный полюс с южным). На сколько частей разделена поверхность глобуса?

2. Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих равенству

$$x^2 + xy = 30000000.$$

3. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске белую ладью и черного короля так, чтобы ладья била короля, но король не бил ладью?

4. Сколько натуральных чисел в диапазоне от 1 до 500 имеют ровно три различных натуральных делителя?

5. Подсчитайте количество различных пар натуральных чисел (x, y) , удовлетворяющих равенству

$$\gcd(x, y) + \text{lcm}(x, y) = 113.$$

Здесь $\gcd(x, y)$ — наибольший общий делитель чисел x и y , то есть наибольшее целое число d , делящее числа x и y , а $\text{lcm}(x, y)$ — наименьшее общее кратное чисел x и y , то есть наименьшее натуральное число l , которое делится на x и y без остатка.

6. Дайте комбинаторное доказательство равенства

$$\sum_{m=k}^n \binom{m}{k} \binom{n}{m} = \binom{n}{k} 2^{n-k}.$$

7. Докажите комбинаторно так называемую формулу суммирования по диагонали

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}. \quad (1)$$

8. Дайте комбинаторное доказательство тождества

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

9. Сколько существует бинарных (т.е. состоящих из цифр 0 и 1) строк длины n , содержащих k единиц? А бинарных строк длины n , содержащих k единиц и таких, в которых никакие две единицы не стоят рядом?

1. Дополнительные задачи

Сложная задача с международной студенческой олимпиады, решать её не обязательно, но за решение вы получите 5 дополнительных баллов.

- (а) Найдите количество слов длины n , состоящих из букв a, b, c, d , в которых четное количество букв a и букв b . Ответ в данной задаче должен быть без знаков суммирования.