1 Графы - I

1.1. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?

1.2. Рассмотрим произвольную смежную пару вершин $\{x, y\}$ в простом графе G на n вершинах. Доказать, что ребро $e = \{x, y\}$ принадлежит по меньшей мере $\deg(x) + \deg(y) - n$ треугольникам в графе G.

1.3. Доказать, что последовательность

$$(n, n, n-1, n-1, \ldots, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$$

всегда является графовой (существует простой граф с такими степенями).

1.4. Существует ли выпуклый многогранник, у которого 15 граней и все грани являются треугольниками?

1.5. Пусть $\mathbf{d}$ есть невозрастающая последовательность, состоящая из n неотрицательных чисел, сумма которых четна. Предположим, что наибольшее число a этой последовательности строго меньше n и отличается от наименьшего числа b этой последовательности как максимум на единицу. Примерами такой последовательности являются, например, последовательности

$$(4, 4, 3, 3, 3, 3) \qquad \text{и} \qquad (3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2).$$

Доказать, что последовательность $\mathbf{d}$ является графовой (существует простой граф с такими степенями).

1.6. Рассмотрим невозрастающую последовательность неотрицательных целых чисел

$$d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n \geqslant 0.$$

Доказать, что такая последовательность является степенной последовательностью некоторого графа G без петель тогда и только тогда, когда сумма всех этих чисел есть четное число и выполняется неравенство

$$d_1 \leqslant d_2 + d_3 + \ldots + d_n.$$

1.7.

$$\mathbf{s_1} := (s_1, s_2, \ldots, s_n): \qquad s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant n-1 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} s_i \geqslant \binom{k}{2}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1; \qquad \sum_{i=1}^{n} s_i = \binom{n}{2}. \tag{2}$$

Доказать, что условия (2) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями для того, чтобы неубывающая последовательность (1) была последовательностью количества очков.