1 Практика

1.1 Конечные автоматы

1. $\{w \in \{0,1\}^* \mid w$ содержит подстроку $01\}$. *(Разобрано на занятии 1)*

2. Два DFA:

   - $\{w \in \{0,1\}^* \mid w$ начинается на $01\}$.
   - $\{w \in \{0,1\}^* \mid w$ оканчивается на $01\}$.

   (Разобрано на занятии 1)

3. $\{w \in \{0,1\}^* \mid$ если в строке более одного символа, предпоследний равен $1\}$. *(Разобрано на занятии 3)*

4. $\{w \in \{0,1,2\}^* \mid$ сумма цифр делится на $3\}$. *(Разобрано на занятии 1)*

5. Покажите, что $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ не распознаётся никаким DFA. *(Разобрано на занятии 1)*

6. $\{w \in \{0,1\}^* \mid$ на каждой чётной позиции стоит $1\}$. Индексация с единицы. Например, распознаётся строка $0\bar{1}1\bar{1}0\bar{1}0\bar{1}$. *(Разобрано на занятии 2)*

7. Язык, состоящий из слов чётной длины, начинаюшихся с 1, и слов нечётной длины, начинаюшихся с 0. *(Разобрано на занятии 3)*

8. Язык, состоящий из слов $\{0,1\}^*$, в последних пяти символах которых хотя бы два раза встречался 0. *(Разобрано на занятии 3)*

9. Сначала несколько определений:

   Определение (Отделимые слова)**.** Будем говорить, что язык L отделяет слова s_1 и s_2, если существует такое слово t, что одно из слов s_1t и s_2t принадлежит L, а другое — нет. Для неотделимых L слов будем писать, что $s_1 \equiv_L s_2$.

   Определение (Индекс языка)**.** Индексом L назовём супремум размеров множеств, в которых все строки попарно отделимы языком L (если все такие множества конечные, то индекс — это размер наибольшего; иначе индекс бесконечный).

   Само задание:

   - Найдите для языка из первой задачи какое-нибудь наибольшего размера множество попарно разделимых им строк.
   - Найдите индекс языка из первой задачи.

   (Разобрано на занятии 2)

10. Найдите индекс языка из задачи №4 из домашнего задания. *(Разобрано на занятии 2)*

11. Регулярный ли язык $P(L) = \{w \mid$ все префиксы w входят в язык $L\}$, если L регулярный? *(Разобрано на занятии 3)*

12. Регулярный ли язык $L^2 = \{ww \mid w \in L\}$, если L регулярный? *(Разобрано на занятии 3)*

13. Если L регулярный, то регулярный ли язык $\{w \mid$ число префиксов w, входящих в L, чётно$\}$? *(Разобрано на занятии 3)*

14. Важные определения:

Определение (Недетерминированный конечный автомат)**.** Недетерминированный конечный автомат (сокращённо "NFA" или "НКА") — это набор вида $(\Sigma, Q, Q_0, \Delta, T)$ такой, что

- Σ, Q, T определены как в DFA;
- $Q_0 \subseteq Q$ — *подмножество* состояний, называемое начальными;
- $\Delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ — функция, которая осуществляет переход из состояния в какое-то *множество* состояний по символу *или по пустой строке*.

NFA A принимает язык L, если A заканчивает хотя бы одно из вычислений на любом входе $w \in L$ в состоянии из T. Формально:

$$L(A) = \{w = a_1 \cdots a_n \mid a_1, \cdots, a_n \in \Sigma, \exists r_0, \cdots, r_n \in Q : r_0 \in Q_0, r_i \in \Delta(r_{i-1}, a_i), r_n \in T\}$$

Определение (co-NFA)**.** co-NFA — это автомат, который устроен точно так же, как NFA, но принимает слово w, только если *каждое* вычисление на входе x в состоянии из T.

Определение (ε-NFA)**.** ε-НКА — НКА, в котором переходы могут быть не только по символам, но и по пустым строкам.

Факт. *Язык, принимаемый ε-НКА, принимается и НКА. (Лекция; вкратце: когда кто-то переходит в состояние q, из которого по пустой строке можно попасть в состояния E, то переход происходит и в E).*

Факт. *Язык, принимаемый НКА, принимается и ДКА. (Лекция; вкратце: построим новый ДКА, множество состояний которого — 2^Q, а дальше всё само получается).*

Приведите DFA и NFA для языка слов, распознаваемых регулярным выражением `a*b*c*`. *(Разобрано на занятии 4)*

15. Покажите, что язык слов над $\{a, b, c\}$, в которых последний символ уже встречался до этого, распознаётся DFA. *(Разобрано на занятии 4)*

16. Покажите, что язык слов над $\{a, b, c\}$, в которых последний символ ещё не встречался, распознаётся DFA. *(Разобрано на занятии 4)*

17. Постройте NFA для языка слов, описываемых регулярным выражением `((01)*|(010)*)`. *(Разобрано на занятии 4)*

18. Напишите в автоматном стиле программу на Си, которая печатает первое слово из каждой поданной на вход строки.

19. Приведите регулярное выражение для языка слов над алфавитом $\{0, 1\}$, не содержащих смежных единиц.

20. Приведите регулярное выражение для языка слов над алфавитом $\{0, 1\}$, содержащих ровно одну пару смежных единиц.

21. Приведите регулярное выражение для языка слов над алфавитом $\{0, 1\}$, содержащих либо ни одной пары смежных единиц, либо одну.

22. Нарисуйте NFA для языка `(0+1)01`.

23. Нарисуйте NFA для языка `00(0+1)*`.

24. Приведите регулярное выражение для языка троичных чисел, сумма разрядов которых делится на три.

25. Приведите регулярное выражение для языка двоичных чисел, кратных пяти.

2 Домашнее задание

2.1 Конечные автоматы

1. $\{w \in \{0,1\}^* \mid w$ не содержит подстроку $01\}$. *(1.5 б.) (Разобрано на занятии 2)*
2. Покажите, что язык L распознаётся DFA тогда и только тогда, когда $\bar{L}$ распознаётся DFA, где $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$. *(2 б.) (Разобрано на занятии 2)*
3. Докажите, что любой конечный язык (иными словами, конечное множество слов) распознаётся DFA. *(2.5 б.) (Разобрано на занятии 2)*
4. $\{a^m b^n \mid m, n \geq 0, m \equiv n \pmod 3\}$. *(2.5 б.) (Разобрано на занятии 2)*
5. $\{w \in \{0,1\}^* \mid w$ делится на 5 как двоичное число$\}$. *(3.25 б.) (Разобрано на занятии 3)*
6. Правда ли, что если L и M распознаются DFA, то $L \cap M$ обязательно тоже? Обоснуйте. *(3.25 б.) (Разобрано на занятии 2)*
7. Правда ли, что если $L \cap M$ распознаётся DFA, то L и M обязательно тоже? Обоснуйте. *(2 б.) (Разобрано на занятии 3)*
8. Покажите, что невозможно распознать DFA язык $\{a^n b^m \mid n \neq m\}$. *(2 б.) (Разобрано на занятии 2)*
9. Покажите, что невозможно распознать DFA язык $\{a^n b^m \mid m, n \geq 0, \gcd(m, n) > 1\}$. *(2.75 б.) (Разобрано на занятии 3)*
10. Покажите, что класс распознаваемых DFA языков замкнут относительно операции $\sqrt{L} = \{m \mid mm \in L\}$. *(3 б.) (Разобрано на занятии 3)*
11. Покажите, что класс распознаваемых DFA языков замкнут относительно операции $L^R = \{m^R \mid m \in L\}$, где $(a_1 a_2 \cdots a_n)^R = a_n a_{n-1} \cdots a_1$. *(1.75 б.) (Разобрано на занятии 5)*
12. Докажите, что язык L распознаётся неким DFA тогда и только тогда, когда индекс L конечен. *(2.75 б.) (Разобрано на занятии 3)*
13. Докажите, что индекс языка L равен минимальному размеру распознающего L автомата. *(2.75 б.) (Разобрано на занятии 3)*
14. Всегда ли, когда L распознаётся DFA, распознаётся и $L/L' = \{u \mid \exists v : uv \in L, v \in L'\}$, где $L' \subseteq \Sigma^*$ — произвольный язык над тем же алфавитом? *(3 б.) (Разобрано на занятии 3)*
15. Всегда ли, когда L распознаётся DFA, распознаётся и $\mathrm{PERMUTE}(L) = \{a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_n} \mid n \geq 0, (k_1 k_2 \cdots k_n)$ — некоторая перестановка, $a_i \in \Sigma, a_1 a_2 \cdots a_n \in L\}$? *(2.75 б.) (Разобрано на занятии 4)*
16. Всегда ли, когда L распознаётся DFA, распознаётся и $\mathrm{SUBSEQ}(L) = \{a_1 a_2 \cdots a_n \mid n \geq 0, a_i \in \Sigma, \exists u_0, \cdots, u_n \in \Sigma^* : u_0 a_1 u_1 a_2 u_2 \cdots a_n u_n \in L\}$? *(2.5 б.)*
17. Всегда ли, когда L распознаётся DFA, распознаётся и $\frac{1}{2}L = \{u \mid u \in \Sigma^*, \exists v \in \Sigma^* : |u| = |v|, uv \in L\}$? *(2.5 б.) (Разобрано на занятии 4)*
18. Всегда ли, когда L распознаётся DFA, распознаётся и $\mathrm{SHIFT}(L) = \bigcup_{k \geq 0} \{a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_n a_1 a_2 \cdots a_k \mid a_1 a_2 \cdots a_n \in L\}$? *(3 б.) (Разобрано на занятии 4)*

19. Приведите такой пример множества $A \subseteq \mathbb{N}$, что язык чисел из A, представленных в двоичной системе, распознаётся DFA, а язык тех же чисел, представленных в троичной, — нет. *(3.5 б.) (Разобрано на занятии 4)*

20. Всегда ли, когда L распознаётся DFA, распознаётся и $h(L) = \{h(x) \mid x \in L\}$, где $L \subseteq \Sigma^*$ и h — некий гомоморфизм на Σ^*? *(3 б.) (Разобрано на занятии 5)*

21. Всегда ли, когда L распознаётся DFA, распознаётся и $h(L) = \{y \mid h(y) \in L\}$, где $L \subseteq \Sigma^*$ и h — некий гомоморфизм на Σ^*? *(3.25 б.) (Разобрано на занятии 5)*

22. Докажите, что нельзя распознать DFA язык $\{0^n \mid n$ — полный квадрат$\}$. *(2.25 б.) (Разобрано на занятии 4)*

23. Покажите, что если детерминированный автомат имеет k состояний и синхронизируется какой-то строкой, то он синхронизируется и строкой длины не более k^3.

    Определение (Синхронизация строкой)**.** Автомат синхронизируется строкой s, если $\forall q_1, q_2 \in Q : \delta(q_1, s) = \delta(q_2, s)$.

24. Покажите, что класс языков, распознающихся co-NFA, совпадает с классом языков, распознающихся NFA.

25. Существует ли такое семейство языков $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, что E_n распознаётся NFA с n состояниями, но требует DFA размером как минимум c^n для некоторого $c > 1$?

26. Покажите, что не распознаётся DFA язык
    $\{w \in \{0,1\}^* \mid w$ — двоичное представление простого числа$\}$.

27. Приведите алгоритм, который по данному DFA A вычисляет количество распознаваемых им слов длины n за $O(\mathrm{poly}(|Q_A| \cdot n))$, где $\mathrm{poly}(x)$ — некая полиномиальная функция.

28. Решите предыдущую задачу за $O(\mathrm{poly}(|Q_A|) \cdot \log(n))$.

29. Будем говорить, что $L_1 \ll L_2$, если $L_1 \subset L_2$ и $|L_2 \setminus L_1| = \infty$. Докажите, что если L_1 и L_2 распознаются DFA и $L_1 \ll L_2$, то существует такой распознаваемый DFA язык L_3, что $L_1 \ll L_3 \ll L_2$.

30. Пусть M_1 и M_2 — DFA, имеющие k_1 и k_2 состояний соответственно, и пусть $U = L(M_1) \cup L(M_2)$, где $L(A)$ — язык, распознаваемый автоматом A. Пусть $U \neq \emptyset$ и $U \neq \Sigma^*$. Докажите, что U содержит некоторую строку s_1 длины не более $\max(k_1, k_2)$ и что существует не принадлежащая U строка s_2 длины не более $k_1 k_2$.

31. Приведите регулярное выражение для языка слов из 0 и 1, в которых каждая пара смежных 0 находится перед парой смежных 1.

32. Приведите регулярное выражение для языка слов из 0 и 1, в которых число символов 0 делится на 3, а число символов 1 чётно.